

جامعة شعيب الدكالي
كلية العلوم



SUJET DES EXAMEN

Smia1

من الجار نالي الناح

www.facebook.com/succes.club

www.clubnajah.blogspot.com

2^{ème} Edition

2014/2015

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على أشرف المرسلين وبعد:

تم بفضل الله إتمام هذا المطبوع ولقد تم إعداد هذا العمل المتواضع من أجل إحاطة الطلبة علما بطريقة وضع الامتحانات و أخذ فكرة مسبقة عن نوعية الأسئلة . و المطلوب من الطالب قبل الشروع في حل الامتحانات مراجعة الدروس و تمارين الأعمال الموجهة جيدا لاستيعاب المفاهيم و ليسهل اختبار قدرات الطالب. و في الختام نشكر كل الطلبة الذين ساهموا من قريب أو بعيد في هذا الانجاز المتواضع و إن شاء الله يكون وسيلة ايجابية للتحصيل العلمي و لتحسين المستوى التعليمي للطلبة. ونتمنى أن يستفيد منه كل الطلبة.

© نادي النجاح

للتواصل معنا :

www.facebook.com/succes.club

clubnajah2013@gmail.com

www.clubnajah.blogspot.com



Epreuve d'algèbre

Session normale

(Durée : 03H00)

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Exercice 1. Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G .

On pose $HK = \{hk; h \in H \text{ et } k \in K\}$.

Sur $H \times K$, on considère la relation binaire \mathcal{R} définie par

$$\forall (h, k), (h', k') \in H \times K, \quad (h, k)\mathcal{R}(h', k') \iff hk = h'k'$$

Pour $h \in H$ et $k \in K$, on pose : $X_{h,k} = \{(h', k') \in H \times K; h'k' = hk\}$.

1°) a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur $H \times K$.

b) Vérifier que $X_{h,k}$ est la classe d'équivalence de (h, k) modulo \mathcal{R} .

2°) (i) Vérifier que la correspondance suivante

$$\begin{aligned} \psi : H \cap K &\longrightarrow X_{h,k} \\ g &\longmapsto (hg, g^{-1}k) \end{aligned}$$

définit bien une application.

(ii) Montrer que ψ est bijective; expliciter ψ^{-1} .

(iii) En déduire que, si G est fini, on a :

$$\text{Card } X_{h,k} = \text{Card } (H \cap K)$$

pour tout $h \in H$ et tout $k \in K$.

3°) Soit

$$\begin{aligned} f : H \times K &\longrightarrow HK \\ (h, k) &\longmapsto hk \end{aligned}$$

a) Montrer que f est une application surjective.

b) Montrer qu'il existe une et une seule application $\bar{f} : (H \times K)/\mathcal{R} \longrightarrow HK$ telle que $\bar{f} \circ j_{\mathcal{R}} = f$, où $j_{\mathcal{R}}$ est la surjection canonique de $H \times K$ sur $(H \times K)/\mathcal{R}$.

c) En déduire que $(H \times K)/\mathcal{R}$ et HK sont équipotents.

4°) On suppose que G est fini. Démontrer que l'on a :

$$\text{Card } (HK) = \frac{\text{Card } H \cdot \text{Card } K}{\text{Card } (H \cap K)}$$

VEUILLEZ TOURNER LA PAGE SVP !

Exercice 2. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif.

I. Un idéal de A est une partie I de A qui vérifie les conditions suivantes :

- $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$
- $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

1°) Montrer que $I \subseteq A$ est un idéal de A si et seulement si on a :

- (i) $I \neq \emptyset$.
- (ii) $\forall (x, y) \in I^2, x + y \in I$.
- (iii) $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

2°) Déterminer les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

3°) Montrer que, $\forall b \in A$, l'ensemble $bA = \{ba; a \in A\}$ est un idéal de A .

II. Pour toute partie S de A , on pose : $J(S) = \{a \in A; \forall x \in S, xa = 0\}$.

1°) Montrer que $J(S)$ est un idéal de A .

2°) Soit $x_0 \in A$ tel que $x_0^2 = x_0$. On pose $I = x_0A$ et $J = J(\{x_0\})$.

Montrer que :

- (i) $I \cap J = \{0\}$.
- (ii) Tout élément de A est la somme d'un élément de I et d'un élément de J .
- (iii) La décomposition décrite dans (ii) est unique.

3°) On prend $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et $x_0 = \bar{6}$.

(a) Montrer que $x_0^2 = x_0$; expliciter I et J dans ce cas.

(b) Montrer à la main que $A = I + J$.

Exercice 3.

1°) Soit $A(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$.

i) Montrer que si $x \in \mathbb{Z}$ est une racine de A , alors $a - x$ divise $A(a)$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

ii) En déduire que si $x \in \mathbb{Z}$ est une racine de A , alors x divise a_0 .

2°) On considère le polynôme $P(X) = 2X^4 - 5X^3 + 4X^2 - 5X + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P .

b) Montrer que P possède une racine entière (i.e. dans \mathbb{Z}) que l'on déterminera.

c) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Examen d'algèbre

(Durée : 3H00)

Exercice 1. Dans tout l'exercice, $(G, +)$ est un groupe abélien. Si $A \subseteq G$, on pose : $-A = \{x \in G; \exists a \in A, x = -a\} = \{-a; a \in A\}$

Définition. Si \leq est une relation d'ordre dans G , on dira que $(G, +, \leq)$ est un **groupe ordonné** s'il vérifie : $\forall a, x, y \in G, \quad x \leq y \implies a + x \leq a + y$.

1. (a) $(\mathbb{R}, +, \leq)$ est-il un groupe ordonné?
 (b) $(\mathbb{R}^*, \times, \leq)$ est-il un groupe ordonné?
2. Montrer que si $(G, +, \leq)$ est un groupe ordonné, alors : $\forall x, y, x', y' \in G$,
 (i) $(x \leq y \text{ et } x' \leq y') \implies x + x' \leq y + y'$.
 (ii) $x \leq y \implies -y \leq -x$.
3. Soit $(G, +, \leq)$ un groupe ordonné. On note $G^+ = \{x \in G; 0 \leq x\}$,
 $G_*^+ = G^+ \setminus \{0\} = \{x \in G^+; x \neq 0\}$ et $G^- = -G^+$.
 Montrer que :
 (a) G^+ est stable dans $(G, +)$.
 (b) $G^+ \cap G^- = \{0\}$.
 (c) L'ordre \leq est total si et seulement si $G^+ \cup G^- = G$.
4. Réciproquement, soit $(G, +)$ un groupe et soit P une partie stable de G telle que $P \cap (-P) = \{0\}$.
 (i) Montrer que la relation \mathcal{R} définie dans G par $(x \mathcal{R} y \iff y - x \in P)$ est une relation d'ordre.
 (ii) Montrer que $(G, +, \mathcal{R})$ est un groupe ordonné.
 (iii) A quelle condition, ce groupe est-il totalement ordonné?

Exercice 2. On munit l'ensemble $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois de composition interne en posant :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx', xy' + yx').$$

1. Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.
2. (a) Montrer que $X = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-anneau de A .
 (b) Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0) \in X$ est un isomorphisme de l'anneau \mathbb{R} sur l'anneau X .
 On identifie alors \mathbb{R} à X en posant $x = (x, 0)$.

3. On note ε l'élément $(0, 1)$ de A .
- (i) Montrer que tout élément $a \in A$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $a = x + y\varepsilon$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.
 - (ii) Pour tout $n \geq 1$, calculer ε^n , puis a^n en fonction de x et y .
- Soit M l'ensemble des éléments $(0, y)$ de A où $y \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que M est un *idéal* de l'anneau A :
- (i) M est un sous-groupe de $(A, +)$.
 - (ii) $\forall a \in A, \forall m \in M, am \in M$.
5. Prouver que le complémentaire \mathbb{C}_A^M de M dans A est l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau A : $\mathbb{C}_A^M = U(A)$.
6. Montrer que l'application $y \in \mathbb{R} \mapsto 1 + y\varepsilon \in A$ est un morphisme injectif du groupe additif \mathbb{R} dans le groupe multiplicatif $U(A) = \mathbb{C}_A^M$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Trouver l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme de $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$$

Examen d'algèbre
-Session de rattrapage-

(Durée : 03H00)

Exercice 1. Soit (E, \leq) un ensemble ordonné muni d'une loi de composition interne $*$ vérifiant :

$$\forall (a, b, x) \in E^3, \quad \begin{array}{l} \text{(i)} \quad a * b \leq a. \\ \text{(ii)} \quad a * b \leq b. \\ \text{(iii)} \quad (x \leq a \text{ et } x \leq b) \implies x \leq a * b. \end{array}$$

Montrer que :

1. $*$ est commutative.
2. Tout élément a de E est *idempotent* : $a * a = a$.
3. $\forall (a, b, c) \in E^3, (a \leq b \implies a * c \leq b * c)$.
4. $\forall (a, b, c, d) \in E^4, \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \implies a * c \leq b * d$.
5. $*$ est associative.

Exercice 2. Soit (G, \cdot) un groupe tel que l'application

$$\begin{array}{ccc} f : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

soit un *endomorphisme surjectif* du groupe G . On se propose de montrer que le groupe G est alors *abélien*.

Soit $(x, y) \in G^2$.

1. En considérant $z \in G$ tel que $f(z) = y$, montrer que :
 - (a) $(xzx^{-1})^3 = xyx^{-1}$.
 - (b) $(xzx^{-1})^3 = x^3yx^{-3}$.
2. En déduire que $yx^2 = x^2y$.
3. Vérifier que $x(yx)^2y = x^3y^3$.
4. En déduire que $(yx)^2 = y^2x^2$.
5. Montrer que $xy = yx$.

Exercice 3. I. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. Une partie I de A est dite un **idéal** de A si elle vérifie :

- (i) $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$
- (ii) $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

1. Montrer que $I \subseteq A$ est un idéal de A si et seulement si on a :

- (i) $I \neq \emptyset$.
- (ii) $\forall (x, y) \in I^2, x + y \in I$.
- (iii) $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

2. Déterminer les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

3. Montrer que, $\forall b \in A$, l'ensemble $bA = \{ba; a \in A\}$ est un idéal de A .

II. Soient \mathbb{K} un corps commutatif, A un sous-anneau de \mathbb{K} et S une partie de A contenant 1, ne contenant pas 0 et stable pour la multiplication. Pour toute partie B de \mathbb{K} , on note B_S l'ensemble $B_S = \{s^{-1}b; s \in S \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que A_S est un sous-anneau de \mathbb{K} , contenant A .

2. Soit I un idéal de A . Montrer que :

- (a) I_S est un idéal de A_S .
- (b) $I_S \cap A$ est un idéal de A .
- (c) $I_S = (I_S \cap A)_S$.

3. Soit J un idéal de A_S .

- (a) Montrer que $J \subseteq (J \cap A)_S$ et que $J_S = J$.
- (b) En déduire que $J = (J \cap A)_S$.

4. Dédire de ce qui précède que J est un idéal de A_S si et seulement si $J = I_S$, avec I un idéal de A .

Examen d'algèbre
-Session de rattrapage-

(Durée : 03H00)

CLUB NAJAH
 UCD.FS.ELJADIDA
 LE PRÉSIDENT

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on désigne par \mathcal{S}_n le groupe symétrique de degré n , c'est-à-dire le groupe des permutations de l'ensemble $E = \{1, \dots, n\}$.

On pose $e = \text{id}_E$ l'élément neutre du groupe \mathcal{S}_n .

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$; on appelle **support** de σ l'ensemble

$$\text{supp } \sigma = \{i \in E; \sigma(i) \neq i\}$$

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sigma \neq e$. Montrer que la restriction de σ à $\text{supp } \sigma$ est une permutation de $\text{supp } \sigma$.
2. Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a :
 - (i) $\text{supp } \sigma^{-1} = \text{supp } \sigma$.
 - (ii) $\forall k \in \mathbb{Z}, \text{supp } \sigma^k \subseteq \text{supp } \sigma$.
3. Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{S}_n^2$. Montrer que

$$\text{supp } \sigma_1 \cap \text{supp } \sigma_2 = \emptyset \implies \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1.$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on considère la relation binaire \mathcal{R}_σ définie sur E par :

$$i \mathcal{R}_\sigma j \iff \exists r \in \mathbb{Z}; \sigma^r(i) = j$$

4. Vérifier que \mathcal{R}_σ est une relation d'équivalence sur E .

Pour tout $i \in E$, on note $\theta_\sigma(i)$ la classe d'équivalence de i modulo \mathcal{R}_σ .

5. Vérifier que, $\forall i \in E$, $\theta_\sigma(i) = \{\sigma^r(i); r \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2. On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{x + i\sqrt{5}y; x, y \in \mathbb{N}\}$.

1. (a) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est un sous-anneau de \mathbb{C} .
 (b) Vérifier que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est le plus petit (pour l'inclusion) sous-anneau de \mathbb{C} contenant $\mathbb{Z} \cup \{i\sqrt{5}\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ définie par

$$f(x + i\sqrt{5}y) = \overline{x + y}$$

- (a) Montrer que f est un morphisme d'anneaux surjectif.
- (b) Montrer que $\ker f = 3\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] + (1 - i\sqrt{5})\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

3. Soit N l'application de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ dans \mathbb{N} définie par :

$$N(x + i\sqrt{5}y) = x^2 + 5y^2$$

- (a) Montrer que N est un morphisme de $(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}], \cdot)$ dans (\mathbb{N}, \cdot) .
- (b) En déduire que le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est $\{-1, 1\}$.

Exercice 3. On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 10X^2 + 1$.

- 1. Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- 2. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.
 - (i) Montrer que si r est une racine de $P(X)$, alors $r = 1$ ou $r = -1$.
 - (ii) En déduire que $P(X)$ n'admet pas de racine dans \mathbb{Q} .
- 3. Montrer que $P(X)$ ne peut pas s'écrire sous la forme

$$P(X) = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

- 4. Déduire de ce qui précède que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Epreuve d'algèbre
-Session de rattrapage-

(Durée : 03H00)

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Exercice 1. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est une racine de P .
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. Soit (G, \cdot) un groupe d'éléments neutre e . Pour $A \subseteq G$ et $x \in G$, on pose :

$$xA = \{xa; a \in A\}, \quad Ax = \{ax; x \in A\} \quad \text{et} \quad xAx^{-1} = \{xax^{-1}; a \in A\}$$

I. Soit H un sous-groupe de G . On définit sur G les relations binaires \mathcal{R} et \mathcal{L} par :

$$\forall (x, y) \in G^2, \quad (x\mathcal{R}y \iff xy^{-1} \in H) \quad \text{et} \quad (x\mathcal{L}y \iff x^{-1}y \in H)$$

1. Montrer que \mathcal{R} et \mathcal{L} sont des relations d'équivalence sur G vérifiant :

$$\forall (x, y, z) \in G^3, \quad (x\mathcal{R}y \implies xz\mathcal{R}yz) \quad \text{et} \quad (x\mathcal{L}y \implies zx\mathcal{L}zy)$$

\mathcal{R} (resp. \mathcal{L}) est appelée la relation d'équivalence à droite (resp. à gauche) modulo H .

2. Soit $a \in G$. On désigne par $C_{\mathcal{R}}(a)$ (resp. $C_{\mathcal{L}}(a)$) la classe d'équivalence de a modulo \mathcal{R} (resp. \mathcal{L}).

(i) Vérifier que $C_{\mathcal{R}}(a) = Ha$ et $C_{\mathcal{L}}(a) = aH$.

(ii) Montrer que les applications

$$\begin{array}{ccc} f_a : H & \longrightarrow & Ha \\ x & \longmapsto & xa \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g_a : H & \longrightarrow & aH \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

sont des bijections.

3. Montrer que les ensembles quotients G/\mathcal{R} et G/\mathcal{L} sont équipotents.

4. On suppose que G est fini et on note $o(G)$ son ordre et $o(H)$ celui de H . On note E l'ensemble quotient de G par la relation d'équivalence \mathcal{R} .

a) Justifier que E est fini. On pose $E = \{C_1, \dots, C_k\}$.

b) Montrer que toutes les classes d'équivalence modulo \mathcal{R} ont le même cardinal égal à $o(H)$.

b) Justifier que $G = C_1 \cup \dots \cup C_k$ et montrer que $o(G) = k \cdot o(H)$.

II. Un sous-groupe H de G est dit **distingué** dans G si : $\forall x \in G, \forall h \in H, xhx^{-1} \in H$.
On écrit $H \triangleleft G$.

1. Montrer que l'on a équivalence entre :

(i) $H \triangleleft G$.

(ii) $\forall x \in G, xHx^{-1} = H$.

(iii) $\forall x \in G, xH = Hx$

2. Vérifier que si $H \triangleleft G$, alors les relations \mathcal{R} et \mathcal{L} définies ci-dessus sont égales.

-
3. Montrer que le centre de G , $Z(G) = \{y \in G; \forall x \in G, xy = yx\}$, est un sous-groupe distingué de G .
 4. Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes. Montrer que
 - (i) $H \triangleleft G \implies f(H) \triangleleft f(G)$.
 - (ii) $H' \triangleleft G' \implies f^{-1}(H') \triangleleft G$.

Exercice 3. On pose $A = \{a + jb; a, b \in \mathbb{Z}\}$ où $j = \exp(i\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de \mathbb{C} .
On désigne par $U(A)$ le groupe des éléments inversibles de A et on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.
2. (i) Montrer que si $z \in A$, alors $N(z) \in \mathbb{N}$.
(ii) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in U(A) \iff N(z) = 1$.
(iii) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $N(a + jb) = 1 \implies a, b \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Décrire le groupe $U(A)$.
4. On considère l'application $\Phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\Phi(P) = P(j)$.
 - (a) Montrer que Φ est un morphisme d'anneaux.
 - (b) Déterminer $\ker \Phi$ (on pourra remarquer que $j^2 + j + 1 = 0$).
 - (c) Montrer que $\text{Im} \Phi = \{a + jb; a, b \in \mathbb{Q}\}$.
 - (d) Montrer que $\text{Im} \Phi$ est un sous-corps de \mathbb{C} .

Examen d'algèbre

(Durée : 3H00)

Question de cours. Soient A et B deux anneaux et $\varphi : A \rightarrow B$ une application vérifiant :

- (i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
- (ii) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Voici trois démonstrations de $\varphi(1_A) = 1_B$:

Démonstration 1 : Etant donné un élément inversible u de A , on a :

$$\varphi(1_A) = \varphi(uu^{-1}) = \varphi(u)\varphi(u^{-1}) = \varphi(u)[\varphi(u)]^{-1} = 1_B.$$

Démonstration 2 : On a : $\varphi(1_A) = \varphi(1_A 1_A) = \varphi(1_A)\varphi(1_A)$.

En simplifiant par $\varphi(1_A)$, on obtient $\varphi(1_A) = 1_B$.

Démonstration 3 : Pour tout $a \in A$, $\varphi(a) = \varphi(1_A a) = \varphi(1_A)\varphi(a)$.

Ainsi, $\varphi(1_A)$ est neutre pour la multiplication dans B , donc c'est 1_B .

Ces trois démonstrations sont bien sûr fausses !

Trouver l'erreur dans chacune d'elles.

Exercice 1. Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G .

1. Soit \sim la relation binaire définie sur G par :

$$\forall a, b \in G, \quad a \sim b \iff ab^{-1} \in H$$

Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur G .

2. Soient a un élément de G et h un élément de H . Montrer que $ha \sim a$.
3. Montrer que si a et b sont deux éléments de G tels que $a \sim b$, alors il existe un élément h de H tel que $b = ha$.
4. Soit a un élément quelconque de G . On note $cl(a)$ sa classe d'équivalence pour la relation \sim . Soit f l'application qui à un élément $h \in H$ associe l'élément ha .

Montrer que f est une bijection de H dans $cl(a)$.

5. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G .

Exercice 2. Soit A un anneau. On appelle centre de A l'ensemble

$$Z(A) = \{x \in A; \forall y \in A, xy = yx\}$$

1. (i) Montrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de A .
 (ii) Montrer que A est commutatif si et seulement si $Z(A) = A$.
2. On suppose que A vérifie : $\forall x \in A, x^3 = x$.
 (a) Montrer que $\forall x \in A, x^2 = 0 \implies x = 0$.
 (b) Montrer que $\forall x \in A, x^2 \in Z(A)$.
 (c) Montrer que $\forall x \in A, 2x \in Z(A)$.
 (d) Montrer que $\forall x \in A, 3x + 3x^2 = 0$.
 (e) Dédurre de ce qui précède que A est commutatif.

Exercice 3.

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^3 - 3X^2 + 4$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la relation binaire \mathcal{R} sur $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], \quad P \mathcal{R} Q \iff A \mid (P - Q)$$

2. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$P \mathcal{R} Q \iff P(2) = Q(2), P'(2) = Q'(2) \text{ et } P(-1) = Q(-1)$$

3. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que l'on a $P \mathcal{R} Q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par A est égal au reste de la division euclidienne de Q par A .
4. \mathcal{R} est-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$?
5. Soient P_1, P_2, Q_1, Q_2 des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P_1 \mathcal{R} Q_1$ et $P_2 \mathcal{R} Q_2$. Montrer que $P_1 P_2 \mathcal{R} Q_1 Q_2$.

Nom :
Prénom :
Filière :
Numéro d'examen :

+CLUB NAJAH+
UCD-FS-ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Examen de Langue Française
Semestre 1- session normale SVT/SMAI

Une autre planète Terre? Certainement pas! Une planète semblable? Peut-être bien!
En apparence, les probabilités semblent même assez élevées. Après tout, il y a plus de 100 milliards d'étoiles dans notre galaxie et des milliards de galaxies dans l'univers! Même si une infime proportion de toutes ces étoiles ont des planètes qui leur tournent autour, il y en a forcément au moins une d'entre elles qui serait susceptible d'abriter un jour la vie

Et pourtant, la Terre est une planète vraiment particulière, bénéficiant d'une situation privilégiée par rapport à son étoile, le Soleil. Imagine un peu: sur toute l'étendue de notre système solaire, une minuscule bande correspondant à 0,5% de sa largeur totale est habitable, en termes de température. Plus loin, c'est trop froid : aucune vie possible. Plus près, c'est trop chaud : les pauvres êtres vivants brûleraient vifs. La Terre a la chance d'être située dans cette petite zone. Comme des campeurs qui se trouvent exactement à la bonne distance d'un feu de camp!

La Terre a également une orbite qui ne fait pas trop varier sa distance au Soleil. Elle reçoit donc à peu près la même quantité d'énergie tout au long de l'année. Plusieurs planètes découvertes autour d'autres étoiles ont des orbites qui ressemblent à un ballon de football : les variations de température n'y sont pas très compatibles avec la vie!

Un autre bon point pour la Terre? La présence d'un garde du corps nommé Jupiter. La moitié intérieure du système solaire a été nettoyée d'une bonne partie des astéroïdes et autres petits corps célestes qui l'encombraient, par l'immense force de gravité de cette planète géante. Si elle n'était pas là, les collisions entre la Terre et ces «cailloux» d'une dizaine de kilomètres de diamètre seraient 10 000 fois plus fréquentes! La dernière fois où c'est arrivé, les dinosaures ont disparu, tout comme une bonne partie de toutes les espèces vivantes. Par contre, si Jupiter **avait été** un peu plus massive, ou située un peu plus près de nous, sa trop forte gravité **aurait pu** empêcher la Terre de retenir une atmosphère respirable et des océans. Bref, là encore, tout est parfait!

Tant qu'on ne détectera pas bel et bien une planète semblable à la Terre, on ne peut donc pas présumer qu'il s'agit d'un objet courant dans l'univers. Mais il y a peut-être une petite planète bien sympathique qui échappe pour l'instant à l'œil de lynx des astronomes et qui a, par un heureux hasard, hérité de privilèges similaires à ceux de notre Terre.

I) Compréhension :

1) De quel type de texte s'agit-il ? justifiez votre réponse.0.5pt

.....

.....

2) Selon l'auteur existe-il une probabilité sur la présence d'une autre planète Terre ? si oui, sur quoi se base t-il ?
0.5pt

.....

.....

3) Selon le texte quelles sont les particularités de notre planète Terre ? 1pt

.....

.....

.....

4) Pourquoi les planètes sont-elles rondes ou sphériques ? 1pt

II) Langue et communication

1- Réécrivez les phrases suivantes en nominalisant les mots soulignés en effectuant les transformations nécessaires : 1.5pts

- Dans les régions humides, on emploie des insecticides. Cela permet d'éviter que les moustiques prolifèrent.

-

- On liquéfie le gaz butane; cela peut se faire à une pression relativement faible.

-

2- Un mari parle au téléphone avec son épouse à propos de leur fils malade.

Répondez en utilisant une construction avec un ou plusieurs pronoms : 3.5pts

Le père : Allô ! Comment va Yassine ?

La mère : ça va. Il va mieux.

Le père : Tu l'as emmené chez le médecin ?

La mère : Oui,

Le père : Il lui a prescrit des médicaments ? *2 pronoms*

La mère : Oui,

Le père : Tu as acheté les médicaments ?

La mère : Non, encore.....

Le père : tu peux m'envoyer l'ordonnance par fax ; je les achèterai en rentrant.

La mère : d'accord,

Le père : Tu as parlé au médecin de ses problèmes de digestion ? *2 pronoms*

La mère : Oui, Il m'a demandé de faire des analyses.

Le père : ?

La mère : Non, Je n'avais pas assez d'argent.

Le père : Au revoir et à tout à l'heure.

3- Reliez les phrases suivantes par un pronom relatif simple : 1.5pt

- La Terre est la seule planète habitable. La position de la terre est favorable.

-

- Ces résultats vont révolutionner le monde de la science. Tu as obtenu ces résultats

-

- Je me souviens de cette époque. Le premier homme a mis le premier pas sur la lune.

-

4- Dans le quatrième paragraphe identifiez les temps des verbes en gras et justifiez leurs emplois : 1.5pt

NOM :

PRENOM :

FILIERE :

EXAMEN DE LANGUE FRANÇAISE

N° EXAMEN

SEMESTRE 1 – SESSION DE RATTRAPAGE

*CLASSE NAJAH+
UCD-FS-EL JADIDA
LE PRESIDENT

Toutes les planètes, sans aucune exception, ont la même forme! La Terre aurait pu faire preuve d'originalité...

En fait, non, elle n'aurait pas pu. C'est la faute de la gravité, qui joue un rôle crucial dans la formation des planètes. Regardons d'un peu plus près la naissance de notre Terre pour mieux comprendre. Il y a des milliards d'années, de minuscules particules se sont attirées les unes les autres, sous l'effet de la gravité. Plus il y avait de matière, plus la force gravitationnelle attirait de nouvelle matière, et ainsi de suite. Jusqu'à ce qu'une planète en résulte.

Mais la force gravitationnelle manque un peu de créativité : lorsqu'il y a suffisamment de masse, elle s'impose en attirant la matière avec une force égale, de toutes les directions possibles vers le centre. Le produit fini ne peut donc avoir qu'une seule forme : sphérique. Pour avoir une forme, disons, pyramidale (pourquoi pas?), il faudrait que la gravité « tire » plus fort dans certaines directions. Et c'est tout simplement impossible! Mais heureusement, la Terre n'est pas suffisamment massive pour que la gravité empêche les montagnes d'exister.

I) Compréhension :

1) De quel type de texte s'agit-il ? justifiez votre réponse. 0.5pt

.....
.....

2) Quel est le responsable de la forme des planètes ? 1pt

.....
.....

3) En se référant à la dernière phrase du texte, si la Terre était plus massive que serait-il passé ? 1pt

.....
.....
.....

4) Parfois, la Lune se place entre le Soleil et la Terre. Comment appelle-t-on ce phénomène naturel ? 1pt

.....
.....

II) Langue et communication

1- Nominalisez les mots suivants: 1.5pt

- Préférer : Finir :

- Exister :

2- Répondez aux questions avec un ou deux pronoms : 1.5pt

- Tous les étudiants ont assisté à la séance de T.P. ?

- Non, ils

- vous avez donné le matériel aux étudiants ?

- Oui, je au début de la séance.

- Tu as demandé aux étudiants de rendre le compte rendu le lundi ?

- Oui, je

3- Reliez les phrases suivantes par le pronom relatif simple qui convient : 1.5pt

- L'écrivain a publié un nouveau livre. L'écrivain a obtenu le prix Nobel.

-

- La théorie m'a beaucoup aidé à comprendre la naissance du monde. Tu m'as expliqué cette théorie.

.....

- Les étudiants ne passeront pas le rattrapage. Les notes de ces étudiants sont inférieures à 5.

.....

4- A quel temps sont conjugués les verbes soulignés dans le texte? Précisez leurs valeurs. 1.5pt

.....

.....

5- Transformez les phrases suivantes à la forme passive ou à la forme active : 1.5pt

- La grammaire est mieux comprise par des exemples.

.....

- Les cellules sensibles de l'œil transmettent les informations au cerveau.

.....

- La couleur peut être évaluée de manière chiffrée.

.....

6- A partir du tableau ci-dessous, rédigez deux phrases dans lesquelles vous exprimez une comparaison et un superlatif : 1pt

Les planètes	La vitesse de rotation	La vitesse de révolution (années)	Rayon
- Mercure	- 59 j	- 0.24	- 2 420
- Venus	- 243 j	- 0.61	- 6 200
- La Terre	- 23h56mn	- 1	- 6 378
- Jupiter	- 9h50mn	- 11.86	- 71 400

- 1)

.....

- 2)

.....

7- Conjuguez les verbes entre parenthèses au temps qui convient : 2pts

- au sud-est de Los Angeles, les Américains (construire) en 1949 leur plus célèbre observatoire.

- L'univers (connaître) actuellement d'énormes transformations.

- Le professeur (finir) son cours quand l'étudiant (entrer)

.....

8- Production écrite : 6pts

On voit très souvent des oiseaux sur des fils électriques. Pourquoi est-ce qu'ils ne sont pas électrocutés ?

Rédigez un paragraphe, de cinq lignes, dans lequel vous expliquez ce phénomène.

Utilisez le lexique suivant : conducteur, corps, un choc électrique, isolant...

FACULTE DES SCIENCES

Nom :

Filière :

EL JADIDA

Prénom :

N° d'examen :

Examen de langue

Semestre 1 Session de rattrapage - Durée : 1h 30

Pythagore le pensait déjà : les mathématiques sont à la base de tout. Quelque 2500 ans plus tard, elles **constituent** toujours la clé d'un grand nombre de disciplines. Impossible de décrire la danse des électrons autour d'un noyau sans avoir recours à l'équation de Schrödinger. Et la théorie du Big Bang, à l'origine de la formation de la terre, repose sur celle de la relativité générale d'Einstein. Que nos physiciens et biologistes en herbe le sachent tout de suite, il est rigoureusement impossible de faire des sciences ... sans faire de maths !

Mais la grande nouveauté, c'est qu'avec l'évolution de notre société moderne, les mathématiques ont encore investi de nouveaux champs de connaissance. L'informatique, tout comme l'automatisation, reposent sur une succession de raisonnements logiques (...) Plus étonnants encore, les maths ont également **réussi** leur percée dans les domaines des sciences humaines, psychologie et géographie notamment, où elles constituent un outil parfait pour l'interprétation de nouvelles données chiffrées. Désormais, elles **dominent** également l'économie ou la finance. Comment **comprendre** l'affaiblissement d'une monnaie si on n'entend rien à un taux d'intérêt ? Pour comprendre les orientations politiques et économiques de ceux qui nous gouvernent, le citoyen d'aujourd'hui doit posséder de bonnes bases mathématiques. Et même les amateurs d'art ou de littérature ne peuvent rester insensibles aux maths ! (...)

Autre atout, plus pédagogique cette fois, les maths constituent indéniablement un formidable outil à la formation de l'esprit. Tout comme le latin ou la philosophie, elles imposent des raisonnements rigoureux, un développement logique.

En fin, et nos enfants l'ignorent trop souvent, les maths peuvent aussi devenir une affaire de plaisir !

Compréhension :

- 1) Donnez un titre à cet article et précisez le but de l'auteur dans ce texte ? 1pt

.....

- 2) Relevez à partir du texte les différents domaines où les mathématiques sont importantes. 1pt

.....

- 3) « Les mathématiques sont une discipline importante » cet argument est répété tout le long du texte. Relevez les différentes formules par lesquelles l'auteur a présenté cet argument **en utilisant un verbe**. 1pt

.....

- 4) En quoi les maths peuvent-elles contribuer au développement des sciences humaines ? 1pt

.....

5) De quel type de texte s'agit-il ? justifiez votre réponse. 0,5pt

.....

.....

.....

Langue et Communication :

1) **Nominalisez les mots soulignés dans le texte : 2pts**

-

-

2) **Répondez aux questions en remplaçant le mot souligné par un pronom personnel complément, comme dans l'exemple: 1,5pt**

- Est-ce que Ahmed te présente ses copains ?
- Oui, il me les présente.
- Et toi, tu lui parles de tes amis ?
- **Oui, je**
- Est-ce qu'il te prête ses livres ?
- **Non,**
- Est-ce qu'il te fait des confidences ?
- **Oui,**

3) **Reliez les phrases suivantes par un pronom relatif simple: 2pts**

- Je me souviens de l'année. Tu as acheté ta maison en cette année.
-
- J'ai acheté le roman. L'auteur de ce roman a remporté le Prix Nobel.
-
- La télévision est tombée en panne. Tu viens d'acheter la télévision.
-

4) **Identifiez les temps verbaux dans les phrases suivantes et précisez leur valeur : 1,5pts**

- Les OGM pourraient éradiquer le problème de la famine dans les pays en voie de développement.
-
- Quand il est arrivé, le professeur avait déjà commencé le cours.
-
- L'avion volait à haute altitude quand l'accident est survenu.
-

5) **Transformez les phrases suivantes de la forme active à la forme passive : 1,5pts.**

- Le nouveau médicament a rapidement guéri la grippe.
-
- Dans cette île, les femmes brodent les jupes et les hommes tressent les paniers.
-
- Son comportement m'étonna.
-

6) **Conjuguiez les verbes entre parenthèses à l'imparfait ou au passé composé : 2pts**

- Quand (être) petit, je (penser) que personne d'autres ne (porter) le même nom. Puis un jour, je (avoir) six ans, des amis de mes parents (venir) à la maison avec leur enfant. Ma mère me (dire) : « il s'appelle Ahmed comme toi ». Moi (je ne lui dire pas) bonjour. Je (partir) en pleurant, j'étais choqué, on avait volé mon prénom et mon identité.

Production écrite : 5pts

Certains soutiennent l'idée que l'université marocaine ne se développerait jamais si elle continue d'accepter tous les étudiants sans aucune sélection.

Dites, en quelques lignes, ce que vous en pensez.

Examen de langue

Semestre 1- Session de rattrapage

Durée 2H

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Demandez à vos parents, ils s'en souviennent. Le 3 décembre 1967, la nouvelle éclata comme une bombe : on avait greffé sur un homme, LOUIS Waschkansky le cœur d'une jeune fille tuée dans un accident. Ceci se passait en Afrique du Sud. Le chirurgien de l'exploit, le professeur Christian Bernard devint illico une vedette mondiale. Le premier greffé du cœur ne devait survivre qu'une semaine à l'opération. Pourtant le premier pas était fait, un être humain avait vécu avec le cœur d'un autre ! Mais cette « pièce » rapportée avait été éliminée par les mécanismes du « rejet »

L'organisme refuse tout corps étranger et ce refus est d'ordre génétique. Nos lymphocytes, une variété de globules blancs, savent détecter toutes cellules ayant un code génétique différent et le détruire ; c'est d'ailleurs en éliminant tous les intrus, virus et microbes que les lymphocytes assurent pour notre plus grand bien notre protection immunitaire. En cas de greffe, le système immunitaire lance contre les cellules étrangères greffées des cellules tueuses : les macrophages. Ils repèrent l'intrus et livrent cet intrus à des lymphocytes T qui détruisent l'intrus, notamment en sécrétant contre cet intrus des toxines. Pour les chercheurs le défi était clair. Il fallait trouver un médicament bloquant l'action des lymphocytes. Un chercheur suisse le Dr Jean François Borel, du laboratoire Sandoz, découvrit dans les années 70 la ciclosporine.

En 1980 la première greffe cardiaque accompagnée d'un traitement de ciclosporine était réalisée sur l'homme. La réussite du traitement allait permettre une fantastique expansion des greffes. Depuis le coup d'envoi de 1967, le taux de réussite dépasse les 80%. La ciclosporine, que le greffé doit prendre toute sa vie, a toutefois un inconvénient. En réduisant l'action des lymphocytes, elle amoindrit la défense immunitaire de l'organisme, le malade supporte la greffe mais risque des infections.

Les laboratoires ont donc dû relever un nouveau défi. En 1982, des chercheurs japonais ont extrait à partir des champignons des anticorps monoclonaux appelées « FK506 » qui neutraliseraient le système immunitaire avec moins d'inconvénients que la ciclosporine. Le FK506 bloquerait les cellules tueuses mais épargnerait d'autres lymphocytes, (...)

I / Compréhension :

Type de texte	0.5
De quelle expérience parle-t-on dans le texte ?	0.5
Où a -t-elle eu lieu ?	0.5
Pourquoi n'a-t-elle pas totalement réussi ?	1
Quelle solution ont proposé les Scientifiques ?	1

II / Langue et communication:

1- Nominalisez les verbes suivants : 2pts

- Refuse :

- Extrait :

- bloquant :

- réalisé :

2- Expliquez les mots suivants : 1pt

- Intrus :

- Le système immunitaire :

3 – Réécrivez la phrase écrite en gras dans le texte en remplaçant les mots soulignés par un pronom personnel complément de façon à éviter la répétition : 1,5pt

.....
.....
.....

4 - Reliez les propositions par le pronom relatif simple qui convient : (1pt)

a- J'ai vu le film. Tu m'as beaucoup parlé de ce film.

b- Le professeur Bernard a réalisé un exploit en médecine. Je te parle du professeur Bernard.

5 – Relevez du texte deux phrases à la forme passive et transformez-les à la forme active en effectuant les changements nécessaires. 2pts

1.....

2.....

6- Précisez à quel mode sont conjugués les verbes soulignés dans la phrase suivante extraite du texte en indiquant leur valeur. 1pts

Le FK506 bloquerait les cellules tueuses mais épargnerait d'autres lymphocytes.

7- Relevez dans le dernier paragraphe une comparaison en remplissant le tableau suivant : 2pts

Comparé	Comparant	Outil de comparaison	Le degré	Sur quoi porte la comparaison

III /Production écrite :(6pts)

Sujet : on constate que la majorité des pays du monde connaissent actuellement des conditions climatiques inhabituelles.

Expliquez, en quelques lignes, les raisons de cette perturbation et dites si l'Homme en est responsable.

Critères d'évaluation :

- l'utilisation des liens logiques,
- la correction de la langue,
- la cohérence et cohésion du texte,
- la présentation de la copie.

Nom :
Prénom :
Filière :

Examen de langue
Semestre 1- Durée 2H

CLUB NAJAH
UCD-FS-EL JADIDA
LE PRÉSIDENT

Contrairement aux autres planètes, la Terre a eu de la chance. Suffisamment massive, elle a été capable de retenir toute son eau. Et jouissant d'une position privilégiée dans le système solaire, ni trop près, ni trop loin du soleil, une majeure partie de toute son eau a pu rester liquide et couler d'abondance sur sa surface.

La manière dont l'eau de la Terre aurait été libérée sous forme de vapeur d'eau dans son atmosphère divise astronomes et géologues : les premiers estiment que cela s'est produit lors de l'intense bombardement extraterrestre de météorites et de comètes que la planète a dû subir au cours de sa formation et les seconds au dégazage volcanique brutal qu'elle a connu plus tard. Quoi qu'il en soit, la Terre s'est progressivement refroidie et la vapeur d'eau libérée s'est condensée, formant une couche nuageuse épaisse autour de la planète. Des pluies torrentielles se sont alors abattues durant des millions d'années. Tout ce déluge d'eau a progressivement sculpté la surface du globe et immergé une partie de la croûte terrestre, formant les premiers océans. Le gaz carbonique à effet de serre très abondant dans l'atmosphère de la jeune planète, s'est peu à peu dissous dans l'eau, réagissant avec le calcium des roches primitives pour former du calcaire qui s'est déposé au fond des océans. Cela permet à la Terre de continuer à se refroidir jusqu'à une température proche de celle que nous connaissons aujourd'hui.

Dans le giron des premiers océans, protégés du rayonnement ultraviolet solaire, les premiers micro-organismes vivants, des bactéries, apparurent, il y a plus de 3,5 milliards d'années. Plus tard, il y a environ 3 milliards d'années, ce fut au tour des premières algues, les algues bleues, qui se mirent alors à produire de l'oxygène par photosynthèse. L'oxygène ainsi fabriqué permit la formation progressive, dans la haute atmosphère, d'une couche d'ozone qui protégea la planète et son atmosphère des rayonnements nuisibles du soleil, notamment des ultraviolets. Grâce à l'oxygène et à l'ozone, la vie put enfin conquérir la Terre ferme : c'était, il y a environ 500 millions d'années.

Aujourd'hui, si l'on pouvait éroder tous les reliefs de notre planète, l'eau liquide recouvrirait toute sa surface formant une couche de trois kilomètres d'épaisseur, une situation très différente de celle de ses consœurs.

Source : www.cnrs.fr

I- Compréhension

- 1) Avant que la vie ne soit possible sur la planète terre, cette dernière est passée par plusieurs étapes. Relevez, à partir du texte, ces différentes étapes, en commençant à chaque fois par un nom. 2.5pts

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

2) Expliquez les mots suivants : 1pt

- Astronome :
- Météorite :
- Déluge :
- Consoeurs :

3) Quelles sont les deux thèses avancées dans le texte sur l'origine de l'eau sur terre ? 0.5pt

.....

.....

.....

.....

.....

I- Langue :

1) Complétez les phrases suivantes par des pronoms personnels compléments : 1.5pt

- de nombreuses maisons sont transformées en chambres d'hôtes. Les touristes sont ravis. Si on réfléchit un peu, c'est une idée géniale.
- Ahmed a échoué au concours d'entrée à une grande école. Sa maman parle gentiment pour remonter le moral. Il veut repasser le concours mais son père refuse. La maman parle au père et finit par Convaincre.

2) Reliez les phrases suivantes par un pronom relatif simple : 2pts

- L'environnement fournit des ressources naturelles. L'homme a besoin de ces ressources.
-
- Je me rappelle de cette époque. On pouvait se promener, durant cette époque, jusqu'au matin sans crainte d'être agressé.
-

3) Relevez dans le deuxième paragraphe une phrase à la forme passive et transformez la à la forme active. 1.5pt

-
-
-
-

4) Transformez les phrases suivantes à la forme active : 1pt

- Les informations sont transmises au cerveau par les cellules sensibles de l'œil.
-
- La lumière rouge est émise par l'yttrium.
-

5) Conjuguez les verbes entre parenthèses aux temps qui conviennent : 1pt

Hier, j'avais un contrôle. Quand je suis arrivé, le professeur déjà (distribuer) les copies, et certains étudiants presque (terminer) l'épreuve.

- Ahmed Bensaid a eu sa licence 10 ans. 2005, il exerce la fonction de professeur de mathématiques. Il s'est inscrit à la faculté pour terminer ses études 2007 où il a pu décroché son master en télécommunication 30 juin 2009. Il pense soutenir sa thèse 4ans.

CLUB NAJAH
UCD FS. ELJADIDA
LE PRESIDENT

Critères d'évaluation :

- l'utilisation des expressions de l'opinion.
- la pertinence des arguments,
- la correction de la langue,
- la cohérence et cohésion du texte,
- la présentation de la copie.

[illegible]

FACULTE DES SCIENCES

Nom :

Filière et gr :

EL JADIDA

Prénom :

N° d'examen :

Examen de langue (Français)

Semestre 1 Session normale - Durée : 1h 30

CLUB N° JAH
UCD-FS-EL JADIDA
LE PRÉSIDENT

C'est un véritable exploit que viennent de réaliser les ingénieurs spatiaux chinois. Leur sonde Chang'e-2 a frôlé, à quelques kilomètres de distance seulement, l'astéroïde **4179 Toutatis**, révélant du même coup les paysages chaotiques de cet énorme rocher de 4,5 km de longueur. La sonde Chang'e-2 avait quitté la Terre en octobre 2010 avant de se satelliser autour de la Lune. Une fois la Lune entièrement cartographiée, les ingénieurs Chinois l'avaient envoyée sur une orbite d'attente, le point de Lagrange L2, situé à environ un million cinq cent mille km de la Terre, dans l'axe Soleil-Terre. Là, Chang'e-2 a patiemment attendu le passage à proximité de la Terre de **Toutatis**. Puis la sonde a quitté le point de Lagrange L2, afin de croiser l'astéroïde, une rencontre couronnée de succès. L'exploit technique est d'autant plus remarquable que les scientifiques ont assigné cet objectif à leur sonde alors que Chang'e-2 n'avait pas été conçue pour une telle rencontre, s'effectuant à 10 km/s, à dix millions de km d'ici. D'ailleurs, ce n'est pas la caméra scientifique de leur sonde que les Chinois ont utilisée pour dresser le portrait de Toutatis, mais une simple webcam de navigation.

Découvert par l'astronome Christian Pollas avec le télescope de Schmidt de l'observatoire de la Côte d'Azur, en 1989, 4179 Toutatis est un astéroïde géo croiseur, qui, comme son nom l'indique, croise régulièrement l'orbite de la Terre. Toutatis a une masse de cinquante milliards de tonnes, et mesure 4500 x 2400 x 1900 mètres. Il présente la forme allongée d'une cacahuète : Toutatis est probablement constitué de deux astéroïdes qui se sont rencontrés et ont fusionné.

Avec le succès de cette mission spatiale, d'autant plus remarquable qu'elle a été largement improvisée, l'astronautique chinoise montre au monde à quelle vitesse elle progresse. Aujourd'hui, la Chine rejoint le club très fermé des nations spatiales capables d'explorer le système solaire, après les Etats-Unis, la Russie, l'Europe et le Japon. Et maintenant ? La sonde lunaire Chang'e-2 pourrait être dirigée vers un autre astéroïde, comme Apophis ou Tukmit.

Serge Brunier- 2012

Compréhension :

- 1) Dans quelle discipline scientifique peut-on inscrire ce texte ? O, 5pt
.....
- 2) Quelle était la mission principale de la sonde **Chang'e-2** ? A-t-elle atteint son objectif ? 1pt
.....
.....
- 3) Quelle était sa deuxième mission ? 0,5pt
.....
.....
- 4) Quelle est la prochaine mission de la sonde Chang'e-2 ? l'auteur en est-il certain ? justifiez votre réponse 1pt
.....
.....
- 5) Quand est-ce que l'astéroïde TOUTATIS a été découvert et par qui ? 1pt
.....
.....
- 6) De quel type de texte s'agit-il ? justifiez votre réponse. 0,5pt
.....
.....

Langue et Communication :

- 1) Réécrivez les phrases suivant en nominalisant les mots soulignés: 1,5pt
- les ingénieurs Chinois avaient envoyé la sonde sur une orbite d'attente.
 -
 - Toutatis est probablement constitué de deux astéroïdes.
 -
 - Cette mission a été improvisée.
 -
- 2) Répondez pour elle en utilisant la construction avec deux pronoms : 2,5pts
- Est-ce que le patron t'a présenté le nouvel associé ?
 - Oui
 - Est-ce qu'il t'a dit ou aurait lieu la réunion ?
 - Oui,
 - Est-ce qu'il assistera à la réunion ?
 - Non,
 - Tu lui as donné les dossiers ?
 - Oui,
 - Est-ce qu'il t'a dit quand il les étudierait ?
 - Non,
- 3) Reliez les phrases suivantes par un pronom relatif simple: 2,5pts
- Ils ont un grand salon. Les murs de ce salon sont couverts d'affiches de stars.
 -
 - Les chinois ont photographié l'astéroïde. L'astéroïde s'appelle 4179 Toutatis.
 -
 - Il a joué un morceau de musique. Le rythme m'a endormi.
 -
 - Je me souviens très bien de cette année. L'eau a envahi une partie de la faculté en cette année.
 -
 - Les photos de Toutatis sont magnifiques. Les chinois ont pris ces photos.
 -
- 4) Identifiez les temps verbaux dans les phrases suivantes et précisez leurs valeurs : 1pt
- La sonde Chang'e-2 avait quitté la Terre en octobre 2010 avant de se satelliser autour de la Lune. Une fois la Lune entièrement cartographiée, les ingénieurs Chinois l'avaient envoyée sur une orbite d'attente.
 -
 -
- 5) Relevez du texte une phrase à la forme passive et transformez la à la forme active : 2pts
- Forme passive
- Forme active
- 6) Conjuguiez le verbe entre parenthèses au temps qui convient : 2,5pts
- Quand je (arriver) au bureau, le directeur (réunir) tout le personnel. J' (essayer) de t'appeler car je (savoir) qu'il (programmer) une longue réunion.
- 7) Reformulez ces phrases en commençant par les mots soulignés : 2pts
- C'était parfait. Les organisateurs nous ont très bien reçus. On m'a logé dans un petit bungalow au bord de la mer. Ils ont parfaitement respecté le programme. Les guides ont très bien commenté les visites.
 -
 -
- 8) Complétez le récit suivant en utilisant les verbes entre parenthèses : 1,5pt
- Nous nous sommes restés que 3 jours à Marrakech mais au bout de 3 jours, nous (visiter les principaux musées, voir les monuments, se promener à Jamaa Lafna).
- 9) Production écrite : 10pts
- On dit souvent que l'internet est une arme à double tranchant.
A la lumière de cette affirmation, développez un argumentaire, de quelques lignes, dans lequel vous exprimez votre point de vue.



Département Maths et Info
Pr. Barkatou

Filière SMIA
AU : 2011/2012

EXAMEN D'ANALYSE 1

Durée : 3 heures

* CLUB NAJAH *
UCD.FS.ELJADIO
LE PRÉSIDENT

Questions de Cours

Question 1 : Énoncer correctement :

1. La formule du Binôme de Newton.
2. La formule de Leibniz.
3. La formule de Taylor-Young.

Question 2 : Retrouver la formule du Binôme de Newton :

1. En appliquant la formule de Taylor à la fonction $P(x) = (1+x)^n$
2. En utilisant la formule de Leibniz.

Question 3 :

1. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :
 - a. $\cos x$ est $\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
 - b. $\sin x$ est $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
2. En déduire les développements limités à l'ordre n et au voisinage de 0 des fonctions $\cos x$ et $\sin x$.

Question 4 : Montrer que pour toutes parties A et B de \mathbb{R} , on a :

1. $(\overline{A})^c = \text{int}(A^c)$
2. $(\text{int}(B))^c = \overline{B^c}$

Question 5 :

1. Montrer que pour tous réels x_1, x_2, \dots, x_n
$$e^{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n})$$
2. En déduire que pour tous réels strictement positifs y_1, y_2, \dots, y_n
$$\sqrt[n]{y_1 \times y_2 \times \dots \times y_n} \leq \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$



Problème

I- Moyenne de Cesaro

Soit (u_n) une suite réelle et soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

1. Montrer que si u_n converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors v_n converge vers l .
2. En considérant la suite $u_n = (-1)^n$, montrer que la réciproque de 1. est fausse.
3. Montrer que si u_n converge vers $+\infty$, alors v_n converge vers $+\infty$.
4. En considérant la suite $u_n = n(1 + (-1)^n)$, montrer que la réciproque de 3. est fausse.
5. On suppose que la suite (u_n) est monotone (par exemple croissante), montrer que si v_n converge vers l , alors u_n converge vers l .

II- Lemme de l'escalier

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. Montrer que si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers l , alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers l .
2. Montrer que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $l > 0$, alors $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers l .
3. Application : Déterminer les limites des suites :

$$(C_{2n}^n)^{\frac{1}{n}} ; \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} ; \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \dots (n+n)} ;$$

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} ; \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{(3n)!}$$

4. On suppose ici que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers l . Etablir que :
 - a. Si $|l| < 1$ alors u_n converge vers 0.
 - b. Si $|l| > 1$ alors u_n converge vers $+\infty$.
 - c. Que dire de la suite (u_n) si $|l| = 1$.

III- Etude de quelques suites

1. Soient $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
Montrer que v_n est une suite géométrique et en déduire la limite de u_n .
2. Soit $a > 0$ et soit f une fonction continue de $[0 ; a]$ dans \mathbb{R}_+^* .
 - a. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \geq \frac{1}{a} \text{ et } u_{n+1} = u_n + f\left(\frac{1}{u_n}\right).$$
 - b. Etudier la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{n}$.



UCD-FSJ

SMIA1

Examen Rattrapage d'Analyse 1Durée : 3 heures**Exercice 1.** Montrer que le minimum de

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

est n^2 ; pour $x_k > 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.**Exercice 2.**

1. Déterminer les réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a. Montrer que $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$.
 - b. En déduire $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 3.

1. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.
3. Déduire de ce qui précède lequel de e^π et π^e est le plus grand ?

Exercice 4. Soient I un intervalle de \mathbb{R} ; $a \in I$; f et g deux fonctions dérivables sur I telles que :

$$f(a) = g(a) \text{ et } f(x) + x \leq g(x) + a \quad (\forall x \in I).$$

Montrer que $g'(a) - f'(a) = 1$.**Exercice 5.**Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(u_n).$$

1. Démontrer qu'il existe un unique réel $l \in [0, 1]$ tel que $l = \frac{1}{2} \cos(l)$.
2. Montrer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$.

**Exercice 6.**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit f une fonction continue sur I . Le but de cet exercice est de montrer que

$$(f \text{ est strictement monotone sur } I) \Leftrightarrow (f \text{ est injective sur } I)$$

Question 1. Montrer que si f est strictement monotone sur I , alors f est injective sur I .

Question 2. On suppose que f est injective sur I et on fixe deux éléments a et b de I tels que $a < b$. f étant injective, $f(a) \neq f(b)$ (supposons $f(a) < f(b)$).

Soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Pour $t \in [0, 1]$, on pose :

$$g(t) = f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx).$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et ne s'annule pas.
2. Déterminer le signe de $g(0)$ puis de $g(1)$.
3. En déduire que f est strictement croissante.
4. Que dire si $f(a) > f(b)$?

Barème indicatif

Exercice 1. _____ 2 points

Exercice 2. _____ 3 points

Exercice 3. _____ 4 points

Exercice 4. _____ 2 points

Exercice 5. _____ 4 points

Exercice 6. _____ 5 points

EXAMEN RATTRAPAGE

Durée : 3 Heures

CLUB NAJAH
UCD.FS.EI.JADIDA
LE PRÉSIDENT

PROBLÈME. Soit I un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point et soit $\text{int}(I)$ son intérieur. Soient f et g deux fonctions continues sur I et dérivables sur $\text{int}(I)$.

1. Démontrer le Théorème des Accroissements Finis qu'on rappelle ici :
pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, il existe au moins un réel $c \in]a, b[$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

2. Montrer que si pour tout $t \in \text{int}(I)$: $f'(t) \leq g'(t)$, alors pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$;

$$f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x).$$

3. En supposant que $I = [a, b]$, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) \text{ existe} \Rightarrow f \text{ est dérivable à droite de } a.$$

Que dire si $\lim_{x \rightarrow b} f'(x)$ existe ?

4. Montrer que si $k = \sup\{|f'(t)| ; t \in \text{int}(I)\} \in \mathbb{R}$, alors pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$:

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$$

5. On suppose que $0 \in \text{int}(I)$. Montrer que si f' est continue en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

6. On suppose que $f : I \rightarrow I$ est de classe C^1 . Soit α un point fixe de f ($\alpha \in I$). Montrer que si $|f'(\alpha)| < 1$, alors il existe un nombre réel $r > 0$ tel que pour tout réel $\theta \in]\alpha - r, \alpha + r[\cap I$, la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \theta \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers α .

7. Montrer que l'équation $\ln(2 + x - x^2) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 1]$. En déduire que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \ln(2 + u_n - u_n^2), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers α .

8. On suppose que la fonction f est de classe C^1 . Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

En supposant que (u_n) n'est pas stationnaire, montrer que si (u_n) converge vers l alors $|f'(l)| \leq 1$.

9. Montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$$

En déduire la limite de la suite de terme général u_n ($n \geq 1$) :

$$u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

10. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}} \right)$$

EXERCICE. Montrer qu'une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.



Exercice 1. Soit x un réel.

1. Déterminer la limite de $u_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx)$.
2. En déduire que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Exercice 2. Montrer que la suite récurrente suivante est de Cauchy.

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \end{cases}$$

Exercice 3. Soient A et B deux sous-ensembles de \mathbb{R} . \bar{A} et $\text{int}(A)$ sont respectivement la fermeture et l'intérieur de A .

1. A est non vide et majorée, montrer que
 - a. $\text{Sup}(A) \in \bar{A}$
 - b. A fermé $\Rightarrow \text{Sup}(A) \in A$
2. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\bar{A} \subset \bar{B}$ et que $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$.
3. Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$.
4. Montrer que : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
5. Si f est continue sur \mathbb{R} , montrer que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ et $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la condition $f[f(x)] = -x$ pour tout réel x . Démontrer que f n'est pas continue.

Exercice 5. Montrer que si f est dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors la dérivée f' vérifie la Propriété des Valeurs Intermédiaires sur I .

Exercice 6. Montrer que les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ et $x \mapsto \text{Arctan}x$ sont uniformément continues sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - E(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique solution x_n appartenant à $[n, n+1[$. Montrer que

$$x_n = n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

EPREUVE D'ANALYSE I

Janvier 2014
(Durée : 3 heures)

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

IMPORTANT :

- Les documents ne sont pas autorisés.
- Les trois exercices sont indépendants.
- On peut traiter chaque question en admettant les résultats précédents (du même exercice) s'ils sont nécessaires.

Question de cours 1

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0 et telle que $f^{(n)}$ (sa dérivée d'ordre n) soit continue en 0.

- Ecrire la Formule de Mac Laurin à l'ordre $(n - 1)$ pour la fonction f .
- Montrer que la fonction f admet un Développement Limité d'ordre n au voisinage de 0.

Question de cours 2

- Donner la définition d'un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$.
- Soit $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur E . Soit $K \subset E$ un ensemble compact. Montrer que l'ensemble $f(K)$ est aussi compact.

Exercice 1

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ ($a < b$) et telle que la fonction dérivée f' soit continue sur $[a, b]$. On définit la fonction g sur $[a, b]$ par

$$g(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2} - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{\alpha}{8}(x-a)^2$$

avec α un nombre réel tel que $g(b) = 0$.

- i) Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f'(d) - f'\left(\frac{d+a}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}(d-a)$$

- En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in]\frac{a+d}{2}, d[$ tel que : $f''(c) = \alpha$ (f'' étant la dérivée seconde de la fonction f).

- En déduire de ce qui précède que le nombre c vérifie nécessairement :

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c)$$

Exercice 2

Soit $a > 1$ un réel fixé. On rappelle que \ln désigne la fonction Logarithme Neperien. On considère les fonctions f et g définies pour $x \in]\frac{-1}{a}, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1 + ax) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x$$

1. a) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{a}^+} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

- b) Définir la fonction dérivée $g'(x)$.
c) En déduire les variations de la fonction g .
2. a) Montrer que $\ln a > \frac{a-1}{a}$
b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]\frac{a-1}{a}, +\infty[$ que l'on note c_1 .
3. Soit la suite numérique (u_n) définie par la donnée de $u_0 > \frac{-1}{a}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
a) On suppose que $u_0 \in [0, c_1]$.
i) Montrer que nous avons : $f([0, c_1]) = [0, c_1]$
ii) Etudier la suite (u_n) pour $u_0 = 0$, puis pour $u_0 = c_1$.
iii) Montrer que si $u_0 \in]0, c_1[$, la suite (u_n) est croissante majorée.
iv) En déduire que si $u_0 \in]0, c_1[$, la suite (u_n) converge vers c_1 .
b) On suppose maintenant que $u_0 > c_1$.
i) Montrer que la suite (u_n) est décroissante minorée.
ii) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3

Soit f une fonction positive croissante sur $[0, +\infty[$ et vérifiant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Montrer que la suite (u_n) est, suivant le signe de $(u_1 - u_0)$, monotone croissante ou monotone décroissante.
b) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall x > A, f(x) < \frac{3}{4}x$.
En déduire que si la suite (u_n) est croissante, elle est nécessairement majorée.
c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Barème : Question de Cours 1 : 2 pts ; Question de cours 2 : 3 pts ;

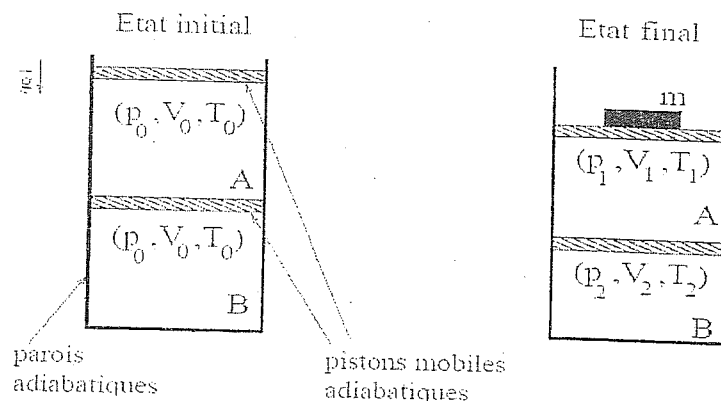
Exercice 1 : 5pts ; Exercice 2 : 7 pts ; Exercice 3 : 4 pts.

EXAMEN DE RATTRAPAGE DE THERMODYNAMIQUE
FILIERE SMAI1, Durée : 1H30

CLUB NAJAH
UCD.FS EL JADID
LE PRESIDENT

PROBLEME I (8 POINTS)

- 1) Déterminer l'entropie S d'une mole de gaz parfait en fonction de sa température T et de sa pression P .
- 2) Considérons un cylindre vertical fermé par un piston mobile adiabatique (qui ne laisse pas passer la chaleur), de masse nulle, de section 100 cm^2 , pouvant se déplacer verticalement sans frottement. A l'intérieur un autre piston adiabatique, de masse nulle, mobile sans frottement, sépare deux compartiments A et B, contenant chacun une mole de gaz parfait. Initialement, les deux gaz sont dans l'état (P_0, V_0, T_0) . On dépose brusquement une masse m sur le premier piston mobile (voir figure ci-dessous). Lorsque l'équilibre est atteint les gaz dans les compartiments A et B sont, respectivement, dans les états $(P_1 = xP_0, V_1, T_1)$ et (P_2, V_2, T_2) avec $x > 1$. Les données du problème sont P_0, T_0, x et γ .

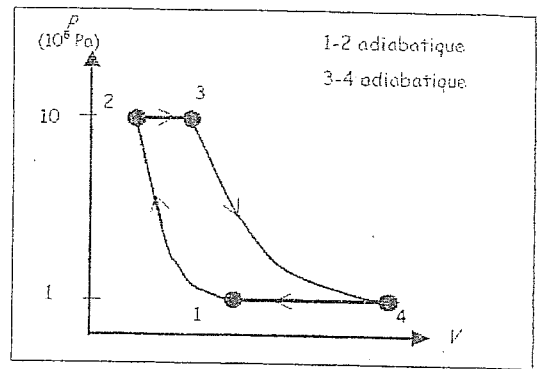
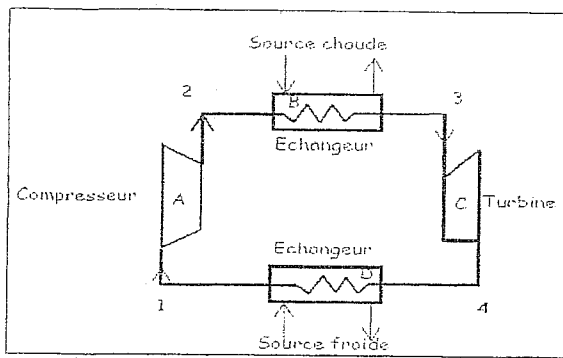


- 2.a. Déterminer m pour $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
- 2.b. En utilisant le premier principe, déterminer $T_1 + T_2$.
- 2.c. Déterminer la variation d'entropie de l'univers entre l'état initial et l'état final en fonction de T_1, T_2 et des données du problème.

PROBLEME II (12 POINTS)

Une turbine à gaz fonctionne avec de l'air suivant le schéma de principe ci-dessous. On étudie le cycle thermodynamique de l'air subissant les transformations réversibles suivantes :

- compression adiabatique dans le compresseur A ;
- échauffement à pression constante dans l'échangeur de chaleur B ;
- détente adiabatique dans la turbine C ;
- refroidissement à pression constante dans l'échangeur de chaleur D



Données :

- Constante des gaz parfaits $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Capacité thermique molaire à pression constante de l'air $C_p = 29,12 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Capacité thermique molaire à volume constant de l'air $C_v = 20,80 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Rapport des capacités thermiques molaires $\gamma = C_p/C_v = 1,4$
- Masse molaire de l'air $M_a = 0,029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

On raisonne sur une masse d'air de 1 kg.

1. Calculer n le nombre de moles d'air.
2. L'air entre dans le compresseur A à la température 300 K et à la pression de $1,0 \times 10^5$ Pa. Calculer le volume V_1 de l'air à l'entrée du compresseur.
3.
 - 3.1. Montrer que la température en fin de compression est : $T_2 = 579 \text{ K}$.
 - 3.2. Le gaz reçoit dans l'échangeur B une quantité de chaleur de 450 kJ. Calculer la température T_3 à la sortie de l'échangeur B.
 - 3.3. Montrer que la température T_4 à la sortie de la turbine a pour valeur : $T_4 = 532 \text{ K}$.
 - 3.4. Calculer la quantité de chaleur reçue par le gaz dans l'échangeur D.
4.
 - 4.1. Calculer la valeur des quantités de chaleur reçues ou cédées par le gaz au cours de chacune des transformations.
En déduire la quantité de chaleur Q_{cycle} reçue au cours d'un cycle.
 - 4.2. En déduire le travail W_{cycle}
Préciser son signe et la signification de celui-ci.

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE
FILIERE SMAI 1
DUREE 1H30

CLUB NAJAH
UCB FS EL JADIDA
LE PRÉSIDENT

PROBLEME I

Un moteur ditherme fonctionne entre deux thermostats selon un cycle constitué de deux transformations adiabatiques réversibles et de deux transformations isochores. Les Températures des thermostats sont T_{FR} (source froide) et T_{CH} (source chaude) avec $T_{FR} < T_{CH}$. Le cycle est décrit par n moles de gaz supposé parfait de capacité thermique molaire à volume constant C_{vm} constante. Pour ce gaz, le rapport γ de la capacité thermique molaire à pression constante C_{pm} et de C_{vm} est égal à 1,4.

Les différentes transformations du cycle sont :

- A \rightarrow B : compression adiabatique réversible de durée Δt ;
- B \rightarrow C : échauffement isochore par contact du gaz avec la source chaude par l'intermédiaire des parois du cylindre qui le contient pendant une durée Δt_1 .
- C \rightarrow D : détente adiabatique réversible de durée Δt ;
- D \rightarrow A : refroidissement isochore par contact du gaz avec la source froide par l'intermédiaire des parois du cylindre qui le contient pendant une durée Δt_2 .

On ne tiendra pas compte de la capacité thermique du cylindre contenant le gaz.

Chaque grandeur pression P , volume V et température T du gaz en un point du cycle sera indiquée par la lettre de ce point.

On notera α le rapport volumétrique $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C} = \alpha$.

Données : $T_{FR} = 350 \text{ K}$; $T_{CH} = 1100 \text{ K}$; $\alpha = 10$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$; $n = 0,05 \text{ moles}$.

$\Delta t = 1,00.10^{-2} \text{ s}$; $\Delta t_1 = 4,43.10^{-2} \text{ s}$; $\Delta t_2 = 3,45.10^{-2} \text{ s}$.

1) Etablir la relation de Mayer. En déduire les expressions de C_{vm} et C_{pm} en fonction de R et de γ .

A.N. : calculer C_{vm} et C_{pm} .

2) Montrer que pour une transformation isentropique réversible d'un gaz parfait de rapport γ constant, on a la relation $PV^\gamma = \text{Cte}$.

En déduire l'expression littérale de T_B en fonction de T_A , α et γ , ainsi que celle de T_D en fonction de T_C , α et γ .

A.N. : calculer T_B et T_D sachant que $T_A = 390 \text{ K}$ et $T_C = 1000 \text{ K}$.

3) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , α et γ , les expressions littérales :

- du transfert thermique Q_C reçu par le gaz, pendant la durée du cycle, de la part de la source chaude
- du transfert thermique Q_F reçu par le gaz, pendant la durée du cycle, de la part de la source froide.

A.N. : calculer Q_C et Q_F .

4) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , α et γ , l'expression littérale du travail W reçu par le gaz pendant la durée d'un cycle.

Quelle est la puissance moyenne P de ce moteur ?

A.N. : calculer W et P .

5) Définir le rendement η de ce cycle moteur. Déterminer l'expression littérale de η en fonction de α et de γ .

A.N. : calculer η .

6) Démontrer l'expression littérale de la valeur maximale η_{\max} du rendement prévue par le théorème de Carnot.

A.N. : calculer η_{\max} . Comparer η et η_{\max} . Que peut-on en conclure ?

7) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , α et γ , les expressions littérales ΔS_{AB} , ΔS_{BC} , ΔS_{CD} et ΔS_{DA} , de la variation d'entropie du gaz pour les quatre transformations du cycle.

A.N. : calculer ΔS_{DA} et ΔS_{BC} .

8) Quelle est la variation d'entropie du gaz au cours du cycle ?

9) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , T_{CH} , α et γ , la variation d'entropie ΔS_{CH} de la source chaude.

A.N. : calculer ΔS_{CH} .

10) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , T_{FR} , α et γ , la variation d'entropie ΔS_{FR} de la source froide.

A.N. : calculer ΔS_{FR} .

PROBLEME II

Un climatiseur est une machine thermique ditherme. Elle décrit des cycles à partir de deux « sources » thermiques constituées d'une part par l'air extérieur de température invariable $T_{ex} = 298 \text{ K}$ et d'autre part par une pièce de température initiale T_i ($T_i = T_{ex}$) que l'on désire porter à la température $T_f = 293 \text{ K}$.

1. Donner le principe de fonctionnement d'un climatiseur. Préciser le signe des échanges énergétiques.

2. Déterminer le travail électrique W_r nécessaire à la machine dans le cas où son fonctionnement est réversible. On supposera que la pièce, dont on évalue la capacité thermique à $C = 5,0 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$, n'échange de l'énergie thermique qu'avec la machine.

3. Quel est le temps nécessaire à la mise en température de cette pièce pour une puissance électrique de 250 W ?

Epreuve de Thermodynamique
Session de rattrapage (Durée : 1 H 30 mn)

CLUB N. JAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Questions de cours

Une machine thermique réceptrice décrit un cycle ditherme lors duquel elle échange la quantité de chaleur Q_C avec la source chaude à la température T_C , la quantité de chaleur Q_F avec la source froide à la température T_F et le travail W_{cycle} avec l'extérieur.

1. Donner le schéma de principe pour une telle machine réceptrice, indiquer le sens et le signe des échanges. Quels sont les deux types possibles pour cette machine.
2. Dans le cas où cette machine est une pompe à chaleur (PAC), rappeler la définition de son coefficient de performance (COP). Exprimer ce COP en fonction des quantités de chaleur Q_F et Q_C échangées. Que signifie la notation : PAC eau-air ?
3. Rappeler sans démonstration l'expression du coefficient (COP) $_C$ dans le cas d'une pompe à chaleur réversible dite de Carnot. Comparer ce (COP) $_C$ au COP d'une PAC réelle.
4. Application : calculer le (COP) $_C$ d'une pompe à chaleur réversible (de Carnot) travaillant entre les deux sources de températures : $t_C = 20^\circ C$ et $t_F = 10^\circ C$

Problème

Un gaz parfait pris à l'état A (P_A, V_A, T_A), subit le cycle des trois transformations réversibles suivantes :

- a) \mathfrak{T}_{AB} : transformation adiabatique qui fait passer le gaz de l'état A à l'état B (P_B, V_B, T_B) où le volume V_B est le double du volume initial V_A .
- b) \mathfrak{T}_{BC} : chauffage isochore de l'état B à l'état C (P_C, V_C, T_C) de façon à revenir à la température initiale T_A .
- c) \mathfrak{T}_{CA} : transformation isotherme de façon à revenir à la pression initiale P_A .

Données : A ($P_A = 10^5 \text{ Pa}$; $V_A = 10^{-2} \text{ m}^3$; $T_A = 300 \text{ K}$) ; $R = 8,32 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$; $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1,4$

- 1) Comment appelle-t-on les transformations \mathfrak{T}_{AB} et \mathfrak{T}_{CA}
- 2) Calculer le nombre de mole n de ce gaz
- 3) Déterminer d'une manière complète les états B (P_B, V_B, T_B) et C (P_C, V_C, T_C).
- 4) Représenter le cycle décrit par ce gaz sur le diagramme (P, V). Quelle est sa nature?
- 5) Calculer les travaux W_{AB} , W_{BC} et W_{CA} , en déduire le travail global échangé W_{cycle} .
- 6) Calculer les quantités de chaleur échangées Q_{AB} , Q_{BC} et Q_{CA} , ainsi que Q_{cycle} .
- 7) Vérifier le premier principe de la thermodynamique sur ce cycle.
- 8) Calculer les variations d'entropie ΔS_{AB} , ΔS_{BC} et ΔS_{CD} . Déduire ΔS_{cycle} .

Epreuve de Thermodynamique

Session de rattrapage

Durée : 1 H 30 mn

CLUB NAJAH
UCO.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Etude du fonctionnement d'un réfrigérateur

A) Un réfrigérateur est constitué essentiellement d'un fluide soumis à une série de cycles thermodynamiques. A chaque cycle le fluide extrait de l'intérieur de l'enceinte une quantité de chaleur Q_F et échange avec l'extérieur, (cuisine), une chaleur Q_C et un travail W . On admettra que l'intérieur du réfrigérateur et son extérieur constituent deux sources de chaleur aux températures $T_F = 270\text{ K}$ et $T_C = 295\text{ K}$ et qu'en dehors des échanges avec ces deux sources, les transformations sont adiabatiques.

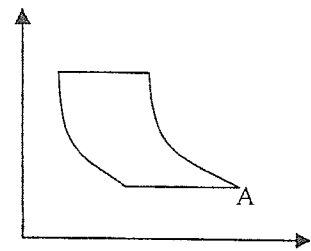
- 1) Donner le schéma énergétique qui représente les deux sources (chaude C et froide F), le système réfrigérateur et les échanges Q_F, Q_C, W ainsi que leurs signes et leurs sens.
- 2) On caractérise l'efficacité, " e_f ", du réfrigérateur par: $e_f = \frac{Q_F}{W}$,
 - 2.1) Quel doit être la nature du cycle pour que cette efficacité, e_f soit maximale?
 - 2.2) En appliquant les deux principes de la thermodynamique, établir l'expression qui donne cette valeur maximale, $(e_f)_m$, la calculer numériquement.
 - 2.3) Dans ce cas (où e_f est maximale), tracer sommairement, le cycle dans le diagramme de Clapeyron (P, V) et dans le diagramme (T, S).

B) On utilise comme fluide un gaz parfait pour lequel les capacités calorifiques C_P, C_V et leur rapport, γ , sont indépendants de la température. On étudie un cycle qui se compose des quatre transformations suivantes:

- ❖ \mathcal{T}_{AB} : compression adiabatique réversible qui fait passer le gaz de l'état $A (P_0, T_F)$ à l'état $B (P_1, T'_C)$. Les pressions sont telles que: $P_0 < P_1$ et $T_F = 270 \text{ K}$.
- ❖ \mathcal{T}_{BC} : refroidissement isobare réversible de l'état $B (P_1, T'_C)$ à l'état $C (P_1, T_C)$ durant lequel le gaz passe dans le radiateur qui est à l'extérieur de l'appareil. On prend : $T_C = 295 \text{ K}$ comme en A).
- ❖ \mathcal{T}_{CD} : détente adiabatique réversible de l'état $C (P_1, T_C)$ à l'état $D (P_0, T'_F)$.
- ❖ \mathcal{T}_{DA} : isobare réversible de l'état $D (P_0, T'_F)$ à l'état $A (P_0, T_F)$. Au cours de cette transformation le gaz passe dans un serpentin à l'intérieur de l'enceinte.

- 1) Compléter le diagramme de Clapeyron (P, V) du cycle étudié et indiquer la température en chaque point.

(Ce schéma sera reproduit sur votre copie)



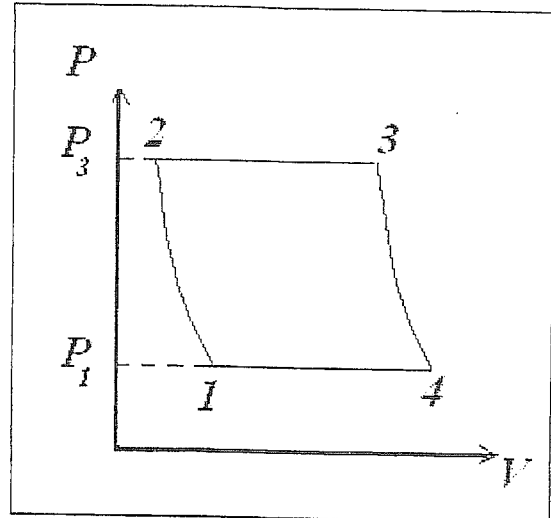
- 2) Etablir les expressions de T'_C et de T'_F . En déduire l'égalité: $T_C \cdot T_F = T'_C \cdot T'_F$
- 3) Déterminer Q_C et Q_F . Dans cette partie, Q_C et Q_F sont bien évidemment les chaleurs échangées respectivement au cours des transformations \mathcal{T}_{BC} et \mathcal{T}_{DA}).
- 4) Montrer que : $\frac{Q_C}{Q_F} = -\frac{T_C}{T'_F} = -\frac{T'_C}{T_F}$.
- 5) Application:
- 5.1) Exprimer l'efficacité, " e_f ", en fonction de T_C et T'_F , puis en fonction de T'_C et T_F .
 - 5.2) Comparer l'efficacité, e_f , à son expression maximale ($e_f)_m$ établie en A).
 - 5.3) Calculer numériquement T'_C , T'_F et l'efficacité e_f en prenant $\gamma = 1,4$ et $P_1/P_0 = 1,8$.
- 6) Donner les expressions de la variation d'entropie du gaz au cours des quatre transformations qui forment le cycle, vérifier que $\Delta S_{cycle} = 0$.
- 7) Tracer le cycle étudié dans le diagramme (T, S).
- 8) Dans le cas réel d'un réfrigérateur domestique, les irréversibilités sont inévitables et l'efficacité réelle n'est que le quart de celle qui est déterminée dans la question 5.3). Calculer alors la consommation électrique en joule, nécessaire pour extraire 1 Kcal.

Epreuve de Thermodynamique

Durée : 1 H 30 mn

On se propose d'étudier un dispositif de turbine à gaz qui fonctionne selon le cycle théorique de Brayton. Dans ce cycle l'air assimilable à un gaz parfait décrit les quatre transformations réversibles suivantes :

- ❖ $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique dans le compresseur.
- ❖ $2 \rightarrow 3$: réchauffement isobare qui se fait avec un apport de chaleur : $Q_C = Q_{23}$.
- ❖ $3 \rightarrow 4$: détente adiabatique dans la turbine.
- ❖ $4 \rightarrow 1$: refroidissement isobare s'accompagnant d'un dégagement de chaleur : $Q_F = Q_{41}$.



Données :

- Le rapport des capacités calorifiques molaires γ est supposé constant : $\gamma = 1,4$
- A l'état (1) la pression et la température sont : $(P_1 = P_4 = 10^5 \text{ Pa} ; T_1 = 300 \text{ K})$
- A l'état (3) la pression et la température sont : $(P_2 = P_3 = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; T_3 = 500 \text{ K})$
- On note le rapport des pressions : $a = \frac{P_2}{P_1}$ et on donne aussi : $R = 8,32 \text{ J/(mol.K)}$

Questions :

- 1) S'agit-il d'un moteur ou d'un récepteur ? indiquer alors le sens de parcours sur le cycle.
- 2) Donner le schéma de principe habituel en sachant qu'au cours des deux isobares $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$, le gaz se met progressivement en équilibre de température avec la source chaude à la température T_3 ou la source froide à la température T_1 . Indiquer le sens et le signe des échanges.
- 3) Rappeler les trois expressions de l'équation d'une adiabatique réversible que suit un gaz parfait pour les différents couples de variables (P, V) , (P, T) et (T, V) .

- 4) En considérant les deux adiabatiques $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$, et en utilisant uniquement les variables (P, T) , exprimer les températures T_2 et T_4 en fonction de a , de γ et des températures adéquates. Les calculer numériquement.
- 5) Calculer pour une mole de gaz les quantités de chaleur Q_{23} et Q_{41} échangées respectivement, au cours des deux transformations $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$ (*encadrer les expressions littérales et les valeurs numériques*).
- 6) Calculer pour une mole de gaz la variation d'entropie ΔS_{23} échangée au cours de la transformation $2 \rightarrow 3$. En déduire ΔS_{41} échangée au cours de la transformation $4 \rightarrow 1$.
- 7) Calculer le travail W échangé par une mole au cours du cycle. (*encadrer l'expression littérale et la valeur numérique*).
- 8) Donner l'expression du rendement \mathfrak{R} du cycle en fonction des températures. Le calculer numériquement.
- 9) Exprimer ce rendement en fonction a et de γ . Pour cela vous pouvez montrer d'abord, qu'on a bien l'égalité suivante : $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$. Comment varie ce rendement avec le taux de compression a ? Justifier votre réponse.
- 10) En considérant le moteur de Carnot qui fonctionnerait entre les mêmes sources chaude et froide aux températures T_1 et T_3 . Calculer son rendement \mathfrak{R}_C .
- 11) Représenter sur un même diagramme de Clapeyron (P, V) les deux cycles étudiés (celui de Carnot et celui de Brayton). Pour les bien distinguer, utiliser deux couleurs différentes. Que représentent leurs aires ? Comparer leurs rendements \mathfrak{R} et \mathfrak{R}_C . Expliquer la différence.

Questions de cours (indépendantes du problème précédent)

Le théorème de l'équipartition de l'énergie pour une particule (*molécule*) de gaz parfait a été annoncé comme suit : à chaque degré de liberté correspond une énergie de $\frac{1}{2}k_B T$ avec $R = N_A \cdot k_B$ où k_B est la constante de Boltzmann et N_A est la constante d'Avogadro. Si le gaz parfait en question est diatomique rigide, le nombre de degrés de liberté est 5 pour chaque particule.

- a) Quelle est donc pour une mole de ce gaz l'énergie interne ? En déduire l'énoncé de la première loi de Joule pour un gaz parfait.
- b) Quelle est sa capacité calorifique molaire à volume constant : $C_{VM} = c_V$. Déduire alors sa capacité calorifique molaire à pression constante : $C_{PM} = c_P$ et ensuite le rapport : $\gamma = c_P / c_V$.

EPREUVE DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL
(Durée 1h 30 mn)

*CLUB
UCD.FS.EL JADIDA
LE PRESIDENT

Problème :

Soient un référentiel fixe (absolu) R_0 (O, X_0, Y_0, Z_0) de base orthonormée directe $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ et un second repère mobile (relatif) R ($O, x, y, z=Z_0$) muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$. Le repère R se déduit de R_0 par rotation autour d'axe (OZ_0) d'angle $\alpha(t) = (OX_0, Ox) = \lambda t$ où λ est une constante. On considère un triangle OAB, lié au repère R , rectangle en O et l'angle (BO, BA) est égale à θ (θ est une constante). Le plan de ce triangle est dans le plan méridien (O, \vec{i}, \vec{k}_0) . On donne les modules : $AB=c$, $OA=a$ et $OB=b$ avec a, b et c sont des constantes.

Un point M, de masse m , est en mouvement de A vers B ; on définit le mouvement de M sur AB par $\overline{AM} = r(t)\vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur unitaire de \overline{AB} (Voir figure).

I- Cinématique

- 1°) Déterminer la vitesse et l'accélération du point B par rapport à R_0 .
- 2°) Exprimer le vecteur \overline{OB} dans la base de R_0 .
- 3°) Déduire l'équation cartésienne de la trajectoire de B par rapport à R_0 , préciser sa nature.
- 4°) Déterminer le rayon de courbure de cette trajectoire

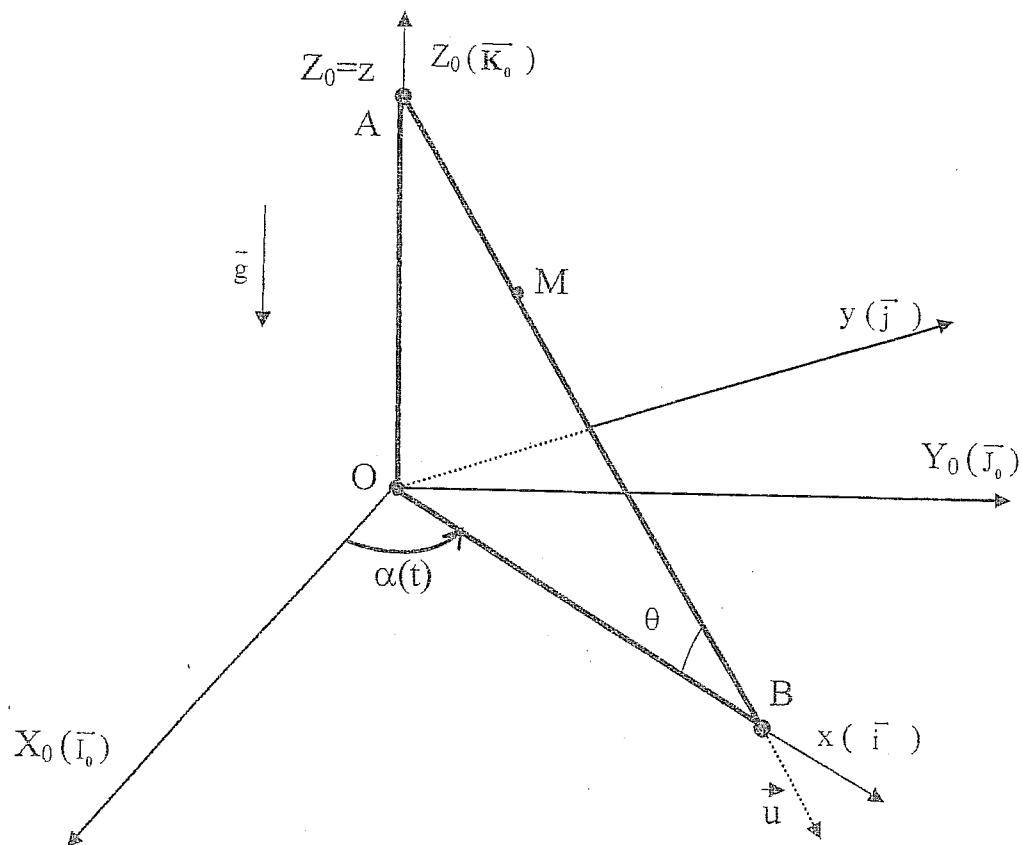
II- Changement de référentiel

- 1°) Préciser la nature des mouvements relatif et d'entraînement de M. Donner l'allure de la trajectoire absolue de M.
- 2°) Déterminer les vitesses relative et d'entraînement de M en déduire sa vitesse absolue,
- 3°) Exprimer la vitesse absolue de M à partir du vecteur \overline{OM} .
- 4°) Déterminer les accélérations relative, Coriolis et d'entraînement de M en déduire son accélération absolue,
- 5°) Exprimer l'accélération absolue de M à partir de la vitesse absolue $\vec{V}_a(M)$.

III- Dynamique

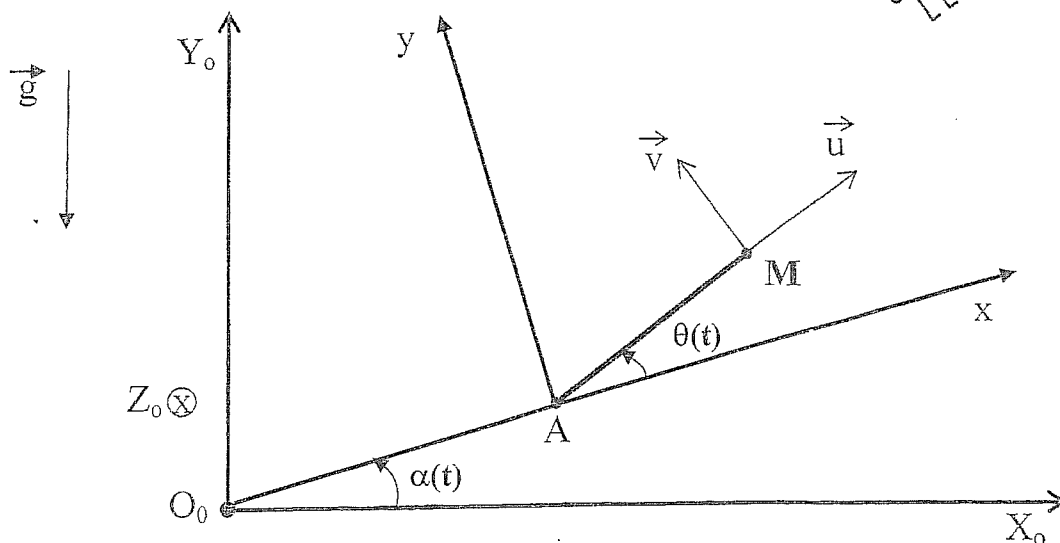
Le point M, de masse m , est soumis à son poids et à la réaction de l'hypoténuse AB que l'on note \vec{R} . On considère un vecteur unitaire \vec{v} tel que $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{j}$ pour former une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{j}, \vec{v})$.

- 1°) Donner, dans la base $(\vec{u}, \vec{j}, \vec{v})$, les composantes de \vec{R} ,
- 2°) Dans le cas où il n'y a pas de frottement entre M et AB, que devient l'équation différentielle du mouvement,
- 3°) Déterminer la solution de cet équation, sachant qu'à $t=0$, $r = r_0$ et $\frac{dr}{dt} = 0$ (r_0 est une constante).



Figure

Problème : Soient un repère galiléen $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$ supposé fixe (absolu), muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ et un second repère $R(A, x, y, Z_0)$ mobile (relatif) muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$, le point A est définie par $\overrightarrow{O_0A} = h(t) \vec{i}$ (h dépend du temps t). Le repère R se déduit de R_0 par rotation d'axe $(O_0 Z_0)$ et d'angle $\alpha(t) = (O_0 X_0, O_0 x)$. (Voir figure). Dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) , un point matériel M, de masse m , et défini par $\overrightarrow{AM} = a \vec{u}$ (a est une constante), son mouvement par rapport à R est donné par l'angle $\theta(t) = (\vec{i}, \vec{v})$ où \vec{u} est le vecteur unitaire de \overrightarrow{AM} et \vec{v} est le vecteur unitaire défini par $\vec{v} = \vec{k}_0 \wedge \vec{u}$.
On suppose que $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{dh}{dt}$ sont des constantes.



I- Etude du mouvement du point A

- 1°) Déterminer la vitesse et l'accélération du point A par rapport à R_0 ,
- 2°) Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire de A par rapport à R_0 ,
- 3°) Montrer que le rayon de courbure de cette trajectoire est constant si h est une constante.
- 4°) On suppose que l'axe $O_0 x$ exerce une réaction \vec{R} sur le point A, de masse m_A . En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer les composantes de \vec{R} .

II- Etude du mouvement du point M

- 1°) Déterminer la vitesse absolue de M à partir de $\overrightarrow{O_0M} = h\vec{i} + a\vec{u}$.
- 2°) Exprimer, les vitesses relative et d'entraînement de M en déduire sa vitesse absolue $\vec{V}_a(\overrightarrow{M})$.
- 3°) Exprimer, les accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis de M en déduire son accélération absolue.
- 4°) Déterminer l'accélération absolue de M à partir de l'expression de $\vec{V}_a(\overrightarrow{M})$.
- 5°) On se place dans le cas particulier pour lequel $h=L$ est une constante, l'angle $\theta(t) = \omega t$ et $\alpha(t) = -\omega t$ (ω est une constante et t est le temps). Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire de M par rapport à R_0 .

I. Question de cours :

Montrer que dans le repère de **Frenet** lié à la particule P ($P, \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$) avec $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$, le vecteur accélération s'écrit sous la forme : $\vec{\gamma} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$. (indication : chercher l'orientation du vecteur $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$).

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

II.

Une particule décrit une courbe plane (C) et sa position M à un instant t est repérée dans un système de coordonnées cartésien orthonormé par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t \end{cases}$$

1. Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire. Quelle est sa nature ?

2. Déterminer le vecteur vitesse \vec{v} de M à l'instant t quelconque.

Calculer numériquement la valeur de son module pour $t = 0$ et $t = 0,5$ s. On donne : $a = 5$ cm, $b = 3$ cm et $\omega = \pi$ rad / s

3. Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ du mobile M. Quelle relation existe-t-il entre $\vec{\gamma}$ et \overrightarrow{OM} ?

En déduire que le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ passe par un point fixe que l'on précisera. En quels points de la trajectoire l'accélération $\vec{\gamma}$ est-elle normale à la trajectoire ?

III.

Un point matériel M, de masse m, se déplace sans frottement, sur une circonférence (C) de centre O et de rayon r, la circonférence (C) est située dans le plan vertical (xOy) d'un référentiel Galiléen R(Oxyz), de base orthonormée directe ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Ox est vertical descendant (c.à.d. orienté vers le bas).

1. La circonférence (C) est fixe dans xOy. Le point M est situé du côté extérieur de (C) et on pose l'angle $\beta = (Oy, \overrightarrow{OM})$.

a. Etablir l'équation différentielle du mouvement de M.

b. A l'instant $t = 0$, M est lancé du point le plus haut de (C) sans vitesse initiale. Déterminer la réaction R exercée par (C) sur M en fonction de m, g et β .

2. La circonférence (C) est maintenant animée, autour de l'une de ses tangentes verticales, d'un mouvement de rotation uniforme défini par sa vitesse angulaire ω .

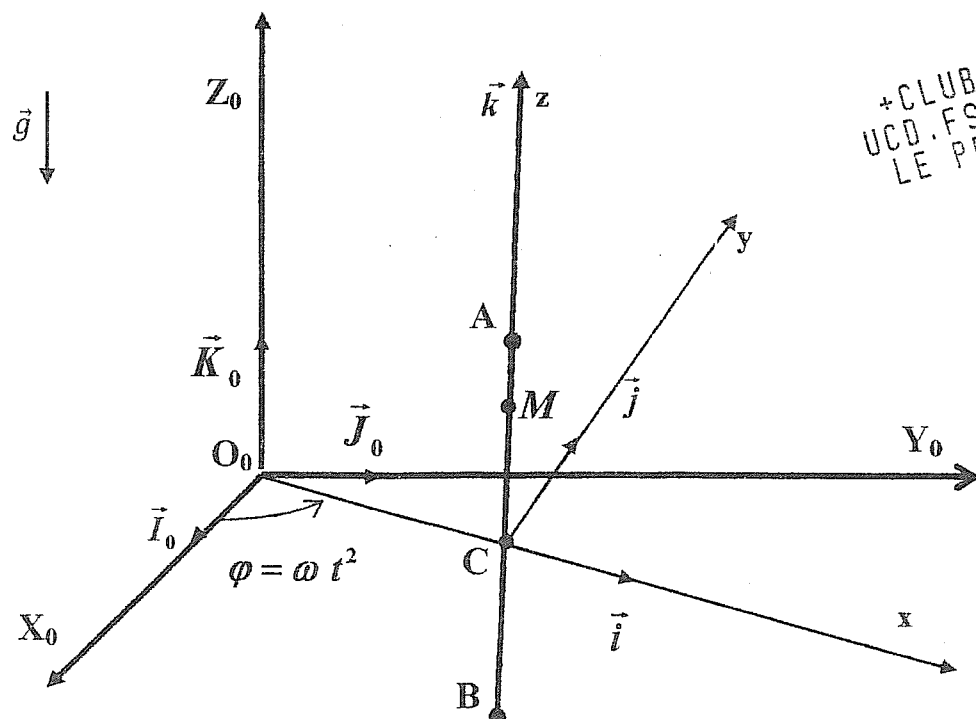
On assimile l'objet M à un anneau enfilé sur (C). (θ est l'angle entre Ox et OM)

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle du mouvement de M.

Examen de mécanique du point matériel (1h 30mn)

On considère $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$ un repère fixe (absolu) et une tige $[AB]$ verticale de milieu C et de longueur $2a$ reste parallèle à l'axe O_0Z_0 . On définit le repère relatif $R(C, x, y, z)$ muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que le vecteur \vec{k} reste parallèle à \vec{K}_0 et le plan (\vec{i}, \vec{j}) reste dans le plan horizontal $(O_0X_0Y_0)$. Les vecteurs \vec{I}_0 et \vec{i} font un angle $\varphi = \omega t^2$ où ω est une constante et t est le temps (voir figure). On donne le vecteur $\vec{O_0C} = R\vec{i}$ où R est une constante positive. Le champ de pesanteur est \vec{g} .

Un point matériel M de masse m est animé, le long de cette tige $[AB]$, d'un mouvement tel que $\vec{CM} = r(t)\vec{k}$ où $r(t) = a \sin \omega t$ avec a et ω sont des constantes positives.



1°) Sans faire de calcul et pour ce problème :

- a- Préciser la nature des mouvements relatif et d'entraînement
- b- Donner le rayon de courbure de la trajectoire relative et du mouvement d'entraînement
- c- Tracer l'allure de la trajectoire absolue de M

2°) Déterminer le vecteur $\vec{O_0M}$ en déduire la vitesse et l'accélération absolues de M

3°) Donner dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

- a) les vecteurs $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_e(M)$ en déduire $\vec{V}_a(M)$,
- b) les vecteurs $\vec{\gamma}_r(M)$, $\vec{\gamma}_e(M)$ et $\vec{\gamma}_c(M)$ en déduire $\vec{\gamma}_a(M)$.

4°) On suppose que la tige $[AB]$ exerce sur M une réaction \vec{R} . Déterminer \vec{R} .

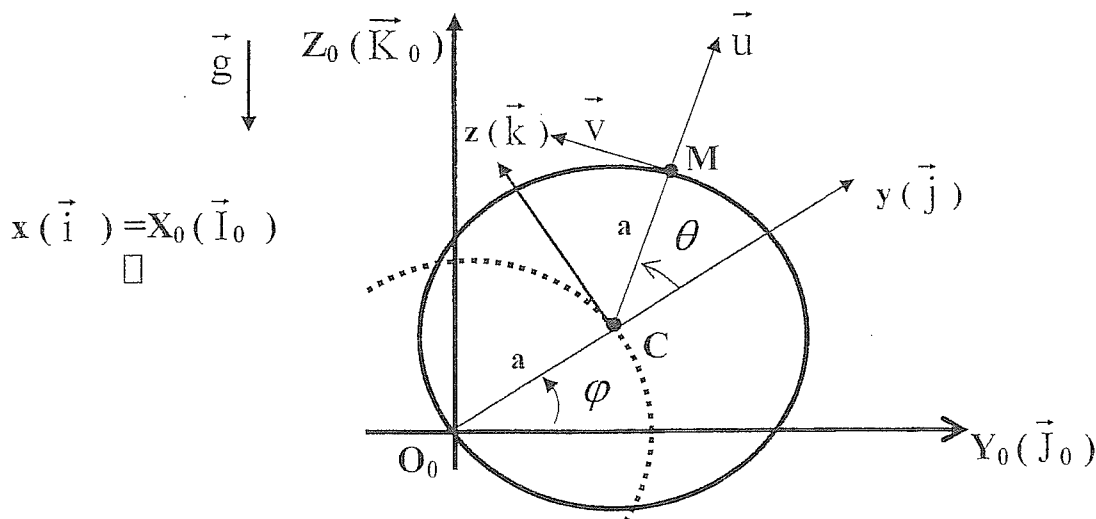
5°) Déduire la réaction \vec{R} dans le cas où le contact, entre la tige $[AB]$ et M , est sans frottement

6°) Dans le cas où $\varphi = \omega t$ et $r(t) = a$, exprimer le rayon de courbure de la trajectoire absolue de M , on

Examen de mécanique du point matériel
Rattrapage (1h 30mn)

Dans le plan (O_0, Y_0, Z_0) du repère $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$ fixe (absolu) de base orthonormée $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, on considère un point C, défini par les coordonnées cylindriques $\rho = a$ (constante positive) et l'angle $\varphi(t) = (O_0 Y_0, O_0 Y)$. On définit le repère relatif $R(C, x, y, z)$ muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que (\vec{j}, \vec{k}) appartient au plan (O_0, Y_0, Z_0) et le vecteur \vec{j} est unitaire de $\overrightarrow{O_0 C}$ (voir figure). Soit un point matériel M, de masse m , mobile sur le cercle de centre C de rayon a ; la position relative de M est repérée par l'angle $(\vec{j}, \overrightarrow{CM}) = \theta(t)$. Le vecteur unitaire de \overrightarrow{CM} est \vec{u} tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$. Dans tout le problème, on suppose que $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi^0$ et $\frac{d\theta}{dt} = \theta^0$ sont des constantes.

L'accélération de pesanteur \vec{g} est portée par $-\vec{k}_0$. (Voir figure)



I-Cinématique :

1°) Déterminer les coordonnées cartésiennes Y_c et Z_c de C dans le repère $R_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, en déduire la nature de la trajectoire absolue de C.

2°) Déterminer dans la base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{i})$:

- a- la vitesse et l'accélération du point C par rapport à R_0 (vitesse et accélération absolues de C)
- b- les vitesses $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_e(M)$ en déduire $\vec{V}_a(M)$,
- c- les accélérations $\vec{\gamma}_r(M)$, $\vec{\gamma}_c(M)$ et $\vec{\gamma}_e(M)$ en déduire $\vec{\gamma}_a(M)$.

3°) Déterminer le rayon de courbure R_c de la trajectoire relative de M et de la trajectoire absolue de C

II- Dynamique :

1°) On suppose que le cercle exerce sur M une réaction \vec{R} et la particule M est soumise en plus à une force $\vec{F} = -\lambda \frac{d\theta}{dt} \vec{v}$ où λ est une constante positive (on néglige le poids de la particule M).

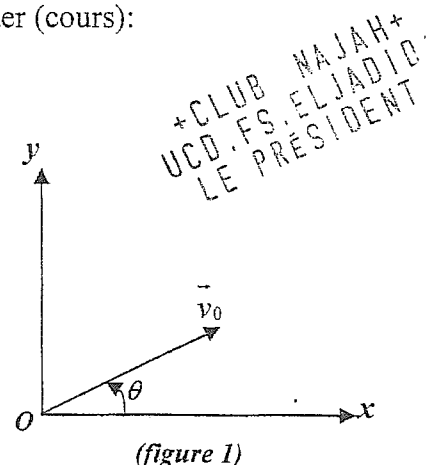
En projetant, dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{i})$, le principe fondamentale de la dynamique, déduire les composantes de la réaction \vec{R} .

2°) Que devient la réaction \vec{R} dans le cas où le contact, entre le cercle et M, est sans frottement

I. Dans le cas de la composition des mouvements, exprimer et interpréter (cours):

- la vitesse d'entraînement
- l'accélération d'entraînement.

II. A l'instant $t = 0$, on lance d'un point O avec une vitesse initiale \vec{v}_0 un projectile ponctuel de masse m , \vec{v}_0 fait avec l'axe horizontal Ox l'angle θ (figure 1); l'axe verticale Oy est orienté vers le haut. On suppose dans tout ce qui suit que le champ de pesanteur est uniforme, c'est-à-dire que l'accélération \vec{g} est indépendante de l'altitude.

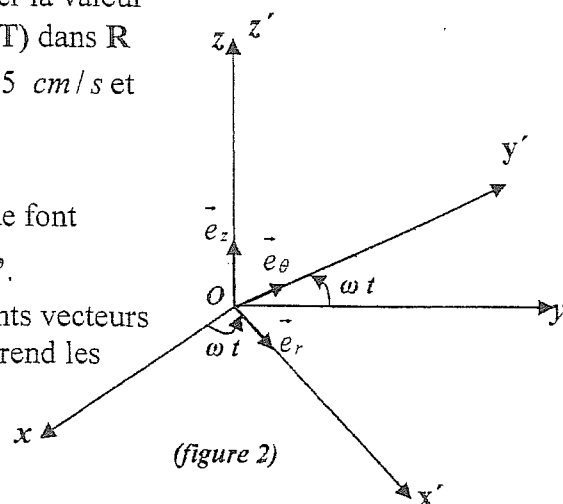


1. Calculer à l'instant t les composantes et le module de la vitesse \vec{v} de M .
2. Quelles sont les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$.
3. En déduire l'équation de la trajectoire. Quels en sont les points remarquables ? Pour quelle valeur de θ obtient-on une portée maximale ?

III. Considérons deux repères orthonormés directs $R(O, x, y, z)$ et $R'(O, x', y', z')$ dont les axes Oz et Oz' sont confondus, R' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire ω constante (figure 2). Soit une particule M animée d'un mouvement uniforme de vitesse $v_0 \vec{e}_r$ le long de Ox' .

Condition initiale : A l'instant $t=0$; $\vec{OM} = \vec{r} = \vec{0}$.

1. A l'instant t , déterminer et représenter sur une figure :
 - a. Les vecteurs vitesses et accélérations de M dans le repère absolu à partir de l'expression du rayon vecteur.
 - b. Le vecteur vitesse de la particule dans R' ainsi que la vitesse d'entraînement.
 - c. Les vecteurs accélérations : l'accélération relative $\vec{\gamma}_r$, l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$. Vérifier qu'en appliquant la règle de composition des accélérations, on retrouve les résultats de la question 1.a..
2. Donner l'expression de la composante tangentielle de l'accélération du mobile M dans R . Calculer le rayon de courbure ρ de la trajectoire.
3.
 - a. On suppose que la particule ne puisse pas dépasser la valeur $r = r_1 = OM_1$. Etablir l'équation de la trajectoire (T) dans R en coordonnées polaires lorsque $r_1 = 40 \text{ cm}$, $v_0 = 5 \text{ cm/s}$ et $\omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$.
 - b. Trouver la relation qui lie les angles ψ_1 et ψ_2 que font respectivement $\vec{v}_a(M)$ et $\vec{\gamma}_a(M)$ avec l'axe Ox' .
 - c. Tracer la trajectoire (T) et représenter les différents vecteurs vitesses et accélérations lorsque l'angle polaire prend les valeurs $0, \pi$ et $\frac{3\pi}{2}$.



Examen
(Durée : 1h30)

CLUB NOUJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

QUESTION

Si un utilisateur (un client) vous demande de lui faire un programme sur ordinateur pour résoudre un problème donné, quelles sont les 5 étapes par lesquelles vous aller passer pour faire ce qu'il a demandé.

EXERCICE 1

Écrire un algorithme, qui demande à l'utilisateur un entier n strictement positif, et un réel x quelconque, puis calcule et lui affiche $S1$ $S2$ et $S3$ tels que :

$$S1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

$$S2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$$

$$S2 = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + nx^n$$

EXERCICE 2

Ecrire un algorithme puis le programme correspondant en langage C, qui lit un entier n puis calcule et affiche le terme S_n de la suite suivante :

$$S_0 = 5$$

$$S_n = 10 + 3 * S_{n-1} \text{ pour } n > 0$$

EXERCICE 3

Un utilisateur souhaite que vous lui fassiez un programme en langage C qui lit un texte de taille maximale 300 lettres. Qui afficher le nombre N de fois que la lettre 'a' est répété (en majuscule ou en minuscule). Puis le nombre M de mots (c'est à dire le nombre de fois que le l'espace ' ' est répété plus 1). Enfin le programme affiche le nombre K de paragraphes (c'est à dire le nombre de fois que le retour à la ligne est répété : le code ASCII du retour à la ligne est 13).

EXERCICE 4

Écrire l'algorithme qui lit un tableau T de taille n ($1 \leq n \leq 100$) à éléments entiers, puis calcul et affiche la moyenne de tous les éléments du tableau T . Il détermine et affiche aussi le minimum et le maximum du tableau.

EXERCICE 5 (optionnelle)

Ecrire en langage C l'algorithme de l'exercice 4, en rajoutant le classement du tableau dans l'ordre croissant.

Éléments du langage C

Les instructions

L'instruction if fait des comparaisons :

```
if (Nombre >= 0)
    printf ("C'est vrai\n");
else
    printf ("C'est faux\n");
```

L'instruction for est utilisée pour une boucle à nombre fixe d'itérations :

```
for (i = 0; i < 20; i++)
    Tableau[i] = i;
```

Les boucles while et do servent à bouclier tant que la condition en paramètre est vraie, avec la différence que la boucle while évalue la condition AVANT les itérations, alors que la boucle do l'évalue seulement APRÈS. Il s'en suit donc qu'une boucle do est toujours exécutée au moins une fois, quelle que soit la condition.

```
i = 0;
while (i < 10)
{
    Tableau[i] = i;
    i++;
}
```

```
i = 0;
do
{
    Tableau[i] = i;
    i++;
}
while (i < 10);
```

L'instruction switch sert à répartir les instructions en fonction de la valeur d'une variable :

```
switch (i)
{
    case 1: printf ("La valeur de i est égale à un\n"); break;
    case 2: printf ("La valeur de i est égale à deux\n"); break;
    case 3: printf ("La valeur de i est égale à trois\n"); break;
    default: printf ("La valeur de i est égale à autre chose\n"); break;
}
```

scanf et printf

Les prototypes génériques de ces deux fonctions se présentent sous la forme :

```
scanf("control", &arg1, &arg2, ...);
printf("control", arg1, arg2, ...);
```

Types de conversion

type	signification
%c	caractère
%s	chaîne de caractères
%d	nombre entier en décimal
%e	nombre réel sous la forme mantisse/exposant [-]m.nnnnnne[+ -]xx
%E	nombre réel sous la forme mantisse/exposant en majuscule [-]m.nnnnnnE[+ -]xx
%f	nombre réel sous la forme [-]mmm.nnnnnn
%g	nombre réel sous la forme la plus courte entre les types %e et %f
%G	nombre réel sous la forme la plus courte entre les types %E et %f
%o	nombre entier en octal
%p	pointeur ou adresse de la valeur numérique
%u	nombre entier non signé en décimal
%x	nombre entier en hexadécimal
%X	nombre entier en hexadécimal ; lettres affichées en majuscules

Exemple d'un programme simple

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main ()
{
    printf ("Bonjour le monde\n");
    system("pause"); return (0);
}
```

Les types des variables s'établissent comme suit :

int	i, j, k;
int	Entier;
short	EntierDe16Bits;
long	EntierDe32Bits;
char	c; 8Bits
float	VirguleFlottante;
double	HautePrecision;
register int	ir;
unsigned char	Chaine[20];
unsigned char *	Pointeur;
int	TableauDEntiers[10][4];

Les opérateurs sont nombreux :

Opérateur	Description
+ - *	Addition, soustraction, multiplication, division
++ --	Incrémement, décrémement
>> <<	Décalage de bits vers la droite et vers la gauche
&	Opérateurs binaires ET et OU
== !=	Comparaison : égalité et différence
< > <= >=	Comparaison : plus petit, plus grand, plus petit ou égal, plus grand ou égal
&&	Comparaison : ET et OU logiques
=	Affectation simple
+= -= *= /= &=	Affectation complexe
=	